IUDAG
INSTITUTO UNIVERSITARIO
DE ADMINISTRACION Y GERENCIA

Guía Didáctica

Matemática Aplicada

Prof. Fidel Cáceres

Caracas, junio 2017

Matemática Aplicada

Matemática aunque, muchas veces, nos cueste darnos cuenta. Muchas personas toman buenas decisiones, basadas en una gran experiencia, que incluye éxitos y fracasos. La matemática pone a nuestra disposición técnicas y métodos para resolver todo tipo de problemas, y en particular los económicos. Su estudio nos provee un camino más corto para aprender a tomar las mejores decisiones y saber justificarlas. En esta guía trataremos diversos aspectos de la matemática

FRACCIONES

Concepto de fracción, Definición y elementos de una fracción

1.) Concepto de Fracción

Alrededor de 3.000 años antes de Cristo, los egipcios crearon una manera de escribir algunos de los números que hoy llamamos **fraccionarios**. Sólo escribían números fraccionarios de la forma

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}$$

Una fracción expresa un valor numérico. Sabemos que los números naturales expresan cantidades referidas a objetos enteros, las fracciones expresan cantidades en las que los objetos están partidos en partes iguales. Una fracción es el cociente de dos números. Es decir, es una división sin realizar. Una fracción expresa el valor o número que resulta al realizar esa división. Los elementos que forman la fracción son: • El numerador. Es el número de arriba, indica las partes que tenemos. • El denominador. Es el número de abajo, indica el número de partes en que dividimos a cada unidad. • La raya de fracción. Es una raya horizontal que los separa. Como se puede notar en las formas previas.

1. Cómo se lee una fracción
2. Primero se lee el numerador como cualquier número, después se lee el denominador de esta manera:
3. • Si es el 1 se lee enteros.
4. • Si es el 2 se lee medios.
5. • Si es el 3 se lee tercios.
6. • Si es el 4 se lee cuartos.
7. • Si es el 5 se lee quintos.
8. • Si es el 6 se lee sextos.

9. • Si es el 7 se lee séptimos.

10. • Si es el 8 se lee octavos.

11. • Si es el 9 se lee novenos.

12. • Si es el 10 se lee décimos.

13. • Si es más de 10 se lee el número terminado en “avos”. Ejemplo: onceavos, doceavos, treceavos, ...

14. • Si es una potencia de 10 se lee el número terminado en “ésimas”. Ejemplo: centésimas, milésimas,

En el lenguaje común se usa la idea de fracción constantemente, por ejemplo, cuando se dice:

> **"Tengo sólo MEDIA hora para resolver este examen''.**
>
> **"Para hacer la torta con tu receta, necesito TRES CUARTOS de taza de leche''.**
>
> **"La TERCERA parte de los estudiantes aprobó con 20 el examen de Matemáticas''.**
>
> **"Te daré la CUARTA parte del dinero que gane por este trabajo''.**

2.) El valor de una fracción

Puesto que una fracción representa una división, para saber cuál es el valor de una fracción deberíamos realizar esa división. No obstante podemos apreciar el valor de una fracción si nos fijamos en su numerador y su denominador.

• Si el numerador es más pequeño que el denominador, entonces la fracción vale menos de 1. • Si el numerador es igual al denominador, entonces la fracción vale 1.

• Si el numerador es mayor que el denominador, entonces la fracción vale más de 1.

Su valor será más grande cuanto mayor tenga el numerador, y será más pequeño cuanto mayor tenga el denominador.

Pasar una fracción a un decimal. Para pasar una fracción a un número decimal se divide el numerador entre el denominador.

• Hay divisiones cuyo resultado en un número natural. • Otras divisiones su resultado es un número decimal con algunas cifras decimales.

• Otras divisiones su resultado es un decimal periódico, que tiene un grupo de cifras decimales que se repiten y por muchas cifras decimales que saquemos no se llega a tener de resto 0.

3) Pasar un decimal a fracción

Paso 1: Escribe el decimal dividido por 1.

Paso 2: Multiplica los números de arriba y abajo por 10 una vez por cada número luego de la coma. (Por ejemplo, si hay dos números luego del decimal, multiplícalos por 100, si hay tres usa el 1000, etc.)

Paso 3: Simplifica (reduce) la fracción

Ejemplo 1: Expresar 0,75 como fracción

Paso 1: Escribe:

0,75

1

Paso 2: Multiplica el numero de abajo y el de arriba por 100 (porque hay 2 dígitos luego de la coma):

× 100

0,75 = 75

100

1

× 100

1. *(¿Ves como el número de arriba se convierte en un entero?)*

Paso 3: Simplifica la fracción:

÷ 25

$$\frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

÷ 25

4) Fracciones equivalentes

Una fracción representa una división, sabemos que hay diversas divisiones que dan el mismo resultado, valen lo mismo. Las fracciones equivalentes tienen distinto numerador y denominador, pero valen lo mismo. Cada fracción tiene infinitas fracciones equivalentes a ella. Para obtener otra fracción equivalente a una dada nos basta con multiplicar o dividir sus términos por el mismo número.

Es posible encontrar una fracción equivalente a otra dada, multiplicando numerador y denominador de esa fracción dada por un mismo número:

$$\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$$

Si la fracción dada fuera 6/9 y se quisiera encontrar una fracción equivalente a ella, puede obtenerse dividiendo el numerador y el denominador por 3:

$$\frac{6\div 3}{9\div 3}=\frac{2}{3}$$

En este caso, ya se sabía que dividir por 3 numerador y denominador produciría una fracción equivalente a 6/9, pues sólo se realizó el proceso inverso al anterior.

En general, para poder encontrar fracciones equivalentes a una dada, dividiendo el numerador y el denominador por el mismo número, es necesario que numerador y denominador sean múltiplos de ese número. Por ejemplo:

$$\frac{4}{6}=\frac{4\div 2}{6\div 2}=\frac{2}{3}$$

En este caso, 4 y 6 son ambos múltiplos de 2.

• Un número racional es todo valor que puede ser expresado mediante una fracción. Todas las fracciones equivalentes entre sí expresan el mismo número racional.

4.1 **Productos cruzados.** Para comprobar si dos fracciones son equivalentes o no, el método más fácil es el de los productos cruzados.

Multiplicamos sus términos en forma de X: El producto del numerador de una fracción por el denominador de la otra, ha de dar lo mismo en ambos casos.

Por ejemplo, sabemos que 2/4 y 4/8 son equivalentes porque 2x8=16 y 4x4=16 (16=16, por lo tanto 2/4=4/8).

5) Simplificar una fracción

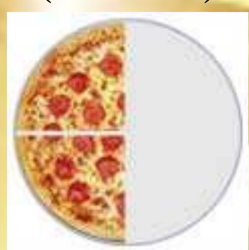
Todas las fracciones equivalentes entre sí representan el mismo valor. Por tanto, nos interesa emplear la fracción más simple, ésa será la que tenga el numerador y denominador más pequeños.

A esa fracción se le llama fracción irreducible porque ya no se puede simplificar más.

Nos valemos de la propiedad fundamental de la división. Sabemos que si multiplicamos o dividimos al numerador y al denominador por el mismo número obtenemos otra fracción equivalente.

Para simplificar una fracción debemos buscar un número que sea divisor del numerador y del denominador para dividirlos por él. Nos interesa dividirlos por el número mayor posible, ese número es el máximo Máximo Factor Común de ambos, así, de una sola vez, habremos llegado a la fracción irreducible

Simplificar (o *reducir*) fracciones significa hacer la fracción lo más simple posible. ¿Por qué decir cuatro octavos ($^{4}/_{8}$) cuando en realidad quieres decir la mitad ($^{1}/_{2}$) ?

$^{4}/_{8}$	==>	$^{2}/_{4}$	==>	$^{1}/_{2}$
(Cuatro octavos)		(Dos cuartos)		(Un medio)
				

5.1) ¿Cómo simplifico una fracción?

Hay dos maneras de simplificar una fracción:

Método 1

Intenta dividir los números de arriba y abajo de la fracción a la vez hasta que no puedas seguir más (prueba a dividirlos por 2,3,5,7,... etc).

Ejemplo: Simplifica la fracción $^{24}/_{108}$:

$$\frac{24}{108} \overset{\div 2}{\underset{\div 2}{=}} \frac{12}{54} \overset{\div 2}{\underset{\div 2}{=}} \frac{6}{27} \overset{\div 3}{\underset{\div 3}{=}} \frac{2}{9}$$

Método 2

Divide las dos partes de la fracción por el Máximo Factor Común (debes calcularlo primero).

Ejemplo: Simplifica la fracción $^{8}/_{12}$:

1. El mayor número que divide exactamente 8 y 12 es 4 (¿por qué?), así que *el Máximo Factor Común es 4.*

2. Divide arriba y abajo por 4:

$$\frac{8}{12} \overset{\div 4}{\underset{\div 4}{=}} \frac{2}{3}$$

Y la respuesta es: $^{2}/_{3}$

5.2) SIMPLICAR FRACCIONES CANCELANDO FACTORES COMUNES. FRACCIONES IRREDUCIBLES

Definición

Si en una fracción en su numerador o en su denominador aparecen fracciones la llamamos una fracción compleja o compuesta.

Simplificar una fracción compuesta es conseguir una fracción simple e irreducible equivalente.

Si no hay operaciones en el numerador, ni en el denominador, se puede efectuar la división para simplificar, considerando luego reducir la fracción resultante a su mínima expresión.

Ejemplo Dividiendo fracciones
Simplificar

$$\frac{\frac{4}{5}}{4}$$

Solución
Como no hay operaciones indicadas en el numerador y en el denominador podemos de una vez dividir.

$$\frac{\frac{4}{5}}{4} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{4}{1}}$$

$$= \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4 \cdot 1}{5 \cdot 4} \quad \text{Se simplifica}$$

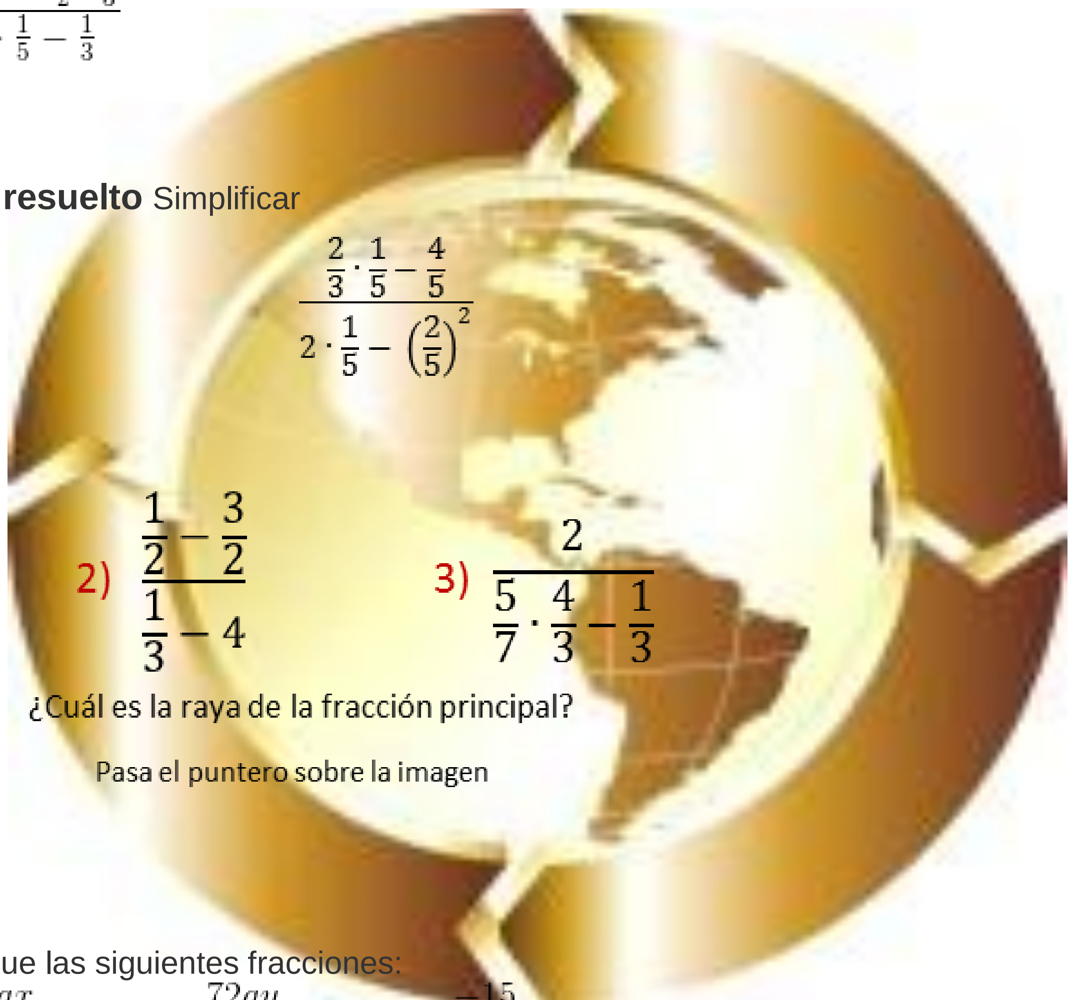
$$= \frac{1}{5}$$

6.) FRACCIÓN NUMÉRICA COMPLEJA

Determine el valor numérico de cada expresión.

1.1) $\dfrac{\frac{2}{3}-3}{4-\frac{2}{9}}$; **1.2)** $\dfrac{2}{3-\frac{1}{5}}$

1.3) $\dfrac{2\cdot 3-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}}{4\cdot\frac{1}{5}-\frac{1}{3}}$



Ejercicio resuelto Simplificar

$$\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}-\frac{4}{5}}{2\cdot\frac{1}{5}-\left(\frac{2}{5}\right)^2}$$

ejemplos

1) $\dfrac{\frac{4}{5}}{4}$ 2) $\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{\frac{1}{3}-4}$ 3) $\dfrac{2}{\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}$

¿Cuál es la raya de la fracción principal?

Pasa el puntero sobre la imagen

4) Simplifique las siguientes fracciones:

3.1) $\dfrac{24ax}{16a}$; **3.2)** $\dfrac{72ay}{6y}$; **3.3)** $\dfrac{-15}{-5a}$

4.4) EJERCICIOS. Ordena de mayor a menor estas fracciones: 5/ 2 , 8/8 , 4/9 , 7/3 3/5, 6/10 , 1/9, 4 /6, 49/7, 3/ 9, 6/ 9, 4/6

7. Operaciones con fracciones

7.1) Paso de fracciones a común denominador

No es lo mismo tener mitades que tener tercios. Cuando sumamos lo hacemos de elementos homogéneos, tienen que ser cantidades de la misma cosa. Para sumar o restar fracciones es necesario que tengan todas el mismo denominador. Para pasar fracciones a común denominador el método más adecuado es el del mínimo común múltiplo de los denominadores, se siguen estos pasos:

1. Se busca el mínimo común múltiplo de los denominadores y se pone de denominador de cada una.

2. Para hallar cada uno de los nuevos numeradores se divide ese número por el denominador de la fracción y se multiplica por su numerador. 6 15 = 2 5 ·3 ·3 5 15 = 1 3 ·5 ·5 Fracciones 70 „ MATEMÁTICAS 1º ESO EJERCICIOS resueltos 5. Reduce a común denominador las fracciones: 12 5 , 15 3 , 45 11 12=22 ·3 15=3·5 20=32 ·5 m.c.m. (12, 15, 45) = 22 ·32 ·5 180:12=15 180 75 180 5 15 12 5 = · = 180:15=12 180 36 180 3 12 15 3 = · = 180:45=4 180 44 45 11 = 6. Calcula: a) + + = 9 4 8 3 6 10 Denominador común: m.c.m.(6, 9, 8)=72 72 179 72 32 72 27 72 120 9 4 8 3 6 10 + + = + + = b) − + = 9 5 18 3 6 1 Denominador común: m.c.m.(6, 18, 9)=54 3 1 54 18 54 30 54 21 54 9 9 5 18 7 6 1 − + = − + = = c) + − = 3 4 6 5 7 4 Denominadopr común: m.c.m.(7, 6, 3) = 42 14 1 42 3 42 56 42 35 42 24 3 4 6 5 7 4 + − = + − = =

7.2) Suma de fracciones

Para sumar fracciones es necesario que tengan todas el mismo denominador. Si ya tienen igual denominador se pueden sumar directamente. El denominador será el mismo y el numerador será la suma de los numeradores. Si las fracciones tienen distintos denominadores se pasan a común denominador, es decir, se cambian por otras equivalentes a ellas pero con el mismo denominador todas, y ya se pueden sumar.

7.3) Sumas y restas de fracciones

Cuando tenemos juntas sumas y restas seguimos el mismo proceso que si tuviéramos solamente sumas:

• Se ponen todas con el mismo denominador.

• Se escribe otra fracción con el mismo denominador y el numerador la suma o resta de los denominadores.

• Se simplifica la fracción resultante si se puede. 15 11 15 6 5 15 5 15 6 3 1 5 2 = + + = + = + − = 6 1 3 2 5 3 = + − + − = 30 18 20 5 30 5 30 20 30 18 10 11 30 33 = = Fracciones + + = 15 6 5 2 = 15 5 3 1 = m.c.m.(3,5) =15 m.c.m.(3,5,6)=30

EJERCICIOS resueltos 7. Multiplica: a) = 9 7 · 5 6 Solución: 15 14 45 42 5 9 6 7 = = · · b) · = 6 5 3 Solución: 2 5 6 15 6 3 5 = = · 8. Divide: a) = 3 7 : 8 6 Solución: 28 9 56 18 7 3 8 6 · = = b) = 3 2 5 : Solución: 2 15 2 3 5 · = c) : 3 = 7 6 Solución: 7 2 7 3 6 3 1 7 6 = · · = 9. Calcula: a) 7 9 : 4 3 5 2 · Solución: 30 7 180 42 9 7 4 3 5 2 · · = = También puedes hacerlo así: Multiplicando en “aspa”:

7.4) Multiplicación de fracciones

Para multiplicar fracciones no hace falta pasarlas a común denominador, se multiplican directamente. • Multiplicamos sus numeradores y lo ponemos de numerador, multiplicamos sus denominadores y lo ponemos de denominador.

Fracción inversa de una fracción.

La inversa de una fracción es otra fracción que al ser multiplicada por ella da la fracción unidad.

• La fracción que tiene el numerador y denominador intercambiados respecto de ella, es su fracción inversa.

Lógicamente, si una fracción es inversa de otra, también son sus inversas todas las equivalentes a esa.

La fracción de valor 0 es la única que no tiene inversa.

División de una fracción por otra.

• Dividir una fracción por otra es lo mismo que multiplicar la primera fracción por la inversa de la segunda fracción.

Una fracción se puede dividir por cualquier otra, menos por la fracción 0

Fracciones 56 15 8 7 3 5 7 5 8 3 = · · · = 10 63 5 9 2 7 9 5 : 2 7 = · = 5 9 9 5 inversas 1 9 5 5 9 5 9 9 5 = · · · = 10 63 2 5 7 9 9 5 : 2 7 = · · = 72

EJERCICIOS resueltos 10. Calcula: a) + + = 5 3 · 6 4 11 8 1 40 689 40 24 40 660 40 5 5 3 4 66 8 1 + + = + + = b) · + + = 4 3 3 7 2 5 8 1 16 33 48 99 48 84 48 15 12 21 16 5 + = + = = c) = + + 5 3 · 6 4 1 8 1 40 71 40 66 40 5 20 33 8 1 5 33 4 1 8 1 + · = + = + = d) = − + 5 3 : 6 4 1 8 1 72 5 27 8 3 5 5 27 : 8 3 5 3 5 30 : 8 2 8 1 = · · = = −

+ e) · = · + 4 3 3 7 2 5 8 1 8 3 8 6 4 24 3 4 3 6 24 8 1 4 3 6 14 6 10 8 1 = · · · · = · · = · +

8) Operaciones combinadas

Para resolver operaciones combinadas debemos tener en cuenta estas indicaciones:

• La misión de los paréntesis es la de unir o "empaquetar" aquello a lo que afectan.

• Los signos de multiplicar unen más que los de sumar y restar, es decir, cuando dos números están unidos por el signo de multiplicar forman un bloque inseparable.

• Para poder sumar o restar dos números deben estar sueltos, no podemos sumar dos números si uno de ellos está unido por el otro lado a otra expresión mediante un signo de multiplicar.

• Las operaciones combinadas se resuelven en varios pasos, todo lo que no se resuelva en un paso se debe copiar otra vez tal como estaba, sin olvidarlo ni cambiarlo de posición.

Como norma general es aconsejable comenzar resolviendo lo del interior de paréntesis, seguir luego con las multiplicaciones y terminar realizando las sumas y restas que queden.

Por eso, antes de comenzar a resolver operaciones combinadas debemos observar la expresión y plantearnos una estrategia a seguir, lo que vamos a hacer antes y después. 1º) los paréntesis: 2º) las multiplicaciones o divisiones: 3º) las sumas y restas: m.c.m(3,30,10)=30 4º) se simplifica si se puede: Fracciones = − + = = 30 45 30 27 30 32 30 50 = − + = 10 9 30 32 3 5 = − · + = 10 9 6 8 5 4 3 5 + = = − · + 10 9 6 3 6 5 5 4 3 5 2 3 = + = − · + 10 7 2 1 6 5 5 4 3 5 MATEMÁTICAS 1º ESO „ 73 Calcular la parte de un número Calcular un número conocida la parte

9). Problemas con fracciones

Ahora que ya conoces los significados de las fracciones y la manera de realizar con ellas las cuatro operaciones básicas, te será fácil resolver problemas utilizándolas.

Debes considerar que una fracción es simplemente un valor numérico.

• Lee atentamente el enunciado del problema.

• Fíjate qué cosa es lo que te pide que calcules.

• Mira los datos con los que cuentan.

• Haz un dibujo o esquema del problema

• Decide las operaciones que debes realizar hasta llegar al resultado.

• Resuélvelo con orden.

• Pon las unidades en el resultado, es decir de qué cosa es.

• Observa el resultado, mira si es un resultado lógico o no. Puede ser que en algo te hayas confundido.

EJEMPLO 1 ¿Cuántos litros de agua contiene un depósito de 400 litros que está ocupado en sus 3/5 partes?

EJEMPLO 2 Un depósito contiene 320 litros de agua y está lleno las dos terceras partes. ¿Qué capacidad tiene?.

EJEMPLO 3 María leyó la semana pasada la mitad de un libro y esta semana la tercera parte, pero aún le faltan 30 páginas, ¿cuántas páginas tiene el libro?.

Ejemplo 4. En una bolsa de 24 bolas, las bolas blancas son 1/4 de ellas. Sin sacar ninguna, ¿cuántas bolas blancas debo añadir para conseguir que las blancas fuesen la mitad?

Ejemplo 5. Un vehículo lleva circulando 26 minutos, en los cuales ha recorrido 2/3 de su trayecto. ¿Cuánto tiempo empleará en recorrer todo el trayecto, yendo siempre a la misma velocidad?

Ejemplo 6 . Una pelota, al caer al suelo rebota hasta los 3/8 de la altura desde la que se la suelta. Si se la deja caer desde 1024 cm, ¿a qué altura llegará tras el tercer bote?

Ejemplo 7. En un pinar de 210 pinos se talaron sus 3/5 partes, poco después hubo un incendio, en el que se quemaron los 5/7 de los pinos que quedaban. ¿Cuántos pinos sobrevivieron?

Ejemplo 8. La familia de Oscar gasta 1/3 de su presupuesto en vivienda y 1/5 en alimentación. ¿Qué fracción del presupuesto queda para otros gastos? Sus ingresos mensuales son de 27350 bolivares . ¿Cuánto pagarán por la vivienda y cuánto en alimentación?

Ejemplo 9. Un ciclista tiene que recorrer 18 km que separan dos pueblos. Si han recorrido 2/3 ¿Cuántos km le faltan todavía?

Ejemplo 10. Cada paso de Eva mide aproximadamente 3/5 de metro. ¿Cuántos pasos dará para recorrer 6 km?

Ejemplo 11. Una empresa quiere embotellar 912 litros de zumo de naranja, si cada botella tiene una capacidad de 2/3 de litro, ¿cuántas botellas necesitará?

Ecuaciones de Primer Grado

Concepto:

Una ecuación es una igualdad que sólo se verifica para unos valores concretos de una variable, generalmente llamada x. Resolver una ecuación consiste en hallar los valores de la variable que hacen cierta la igualdad. Recuerda: Si un elemento está sumando en un miembro pasa al otro restando. Si está restando pasa sumado. Si un número multiplica a todos los elementos de un miembro pasa al otro dividiendo y si los divide pasa multiplicando.

• El grado de una ecuación viene dado por el exponente mayor de la incógnita. En esta guía trabajamos con ecuaciones lineales (de grado 1) con una incógnita.

• Solucionar una ecuación es encontrar el valor o valores de las incógnitas que transforman la ecuación en una identidad.

• Dos ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

• Para conseguir ecuaciones equivalentes, sólo se puede aplicar alguna de las siguientes propiedades: Propiedad 1: Sumar o restar a las dos partes de la igualdad una misma expresión. Propiedad 2: Multiplicar o dividir las dos partes de la igualdad por un número diferente de cero. Ejercicios de autoaprendizaje:

1. Resolvemos algunas ecuaciones: Procedimiento para resolver una ecuación de 1er grado: • Eliminar denominadores: multiplicando ambas partes de la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores. (Propiedad 2) • Eliminar paréntesis. (Propiedad distributiva) • Transposición de términos. Conseguir una ecuación de la forma $a \cdot x = b$. (Propiedad 1). • Despejar la incógnita. (Propiedad 2). • Comprobar la solución.

a) 3( )( ) 2x + 5 − 2 4 + 4x = 7 lo primero que hacemos será las operaciones de los paréntesis 6x + 15 − 8 − 8x = 7 sumamos los términos en x y los términos independientes − 2x + 7 = 7 transponemos los términos − 2x = 7 − 7 ⇒ 0 − 2x = despejamos la incógnita ⇒ 0 x = Comprobación: Al sustituir en la ecuación x = 0, transforma la ecuación en identidad: 3( )( ) 2 · 0 + 5 − 2 4 + 4 · 0 = 7 ⇒ 3 · 5 − 2 · 4 = 7 b) 3 9 2x 2 6 x 3 4 − = + + − ⇒ Multiplicamos ambas partes de la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores |) | | (– | = · +) | | (+ · − 3 9 2x 6 2 6 x 3 6 4 ⇒ 24 − () ( ) x + 3 = 12 + 2 9 − 2x eliminamos los paréntesis 24 − x − 3 = 12 + 18 − 4x ⇒ x 21− x = 30 − 4 transponemos los

términos 4x − x = 30 − 21 ⇒ 9 3x = despejamos la incógnita ⇒ x = 3 Comprobación: 3 9 2 3 2 6 3 3 4 − · = + + − ⇒ 33

Porcentajes

El **porcentaje** es un número asociado a una razón, que representa una cantidad dada como una fracción en 100 partes. También se le llama comúnmente **tanto por ciento**, donde *por ciento* significa «de cada cien unidades». Se usa para definir relaciones entre dos cantidades, de forma que el *tanto* por ciento de una cantidad, donde *tanto* es un número, se refiere a la parte proporcional a ese número de unidades de cada cien de esa cantidad.

El porcentaje se denota utilizando el símbolo %, que matemáticamente equivale al factor 0,01 y que se debe escribir después del número al que se refiere, dejando un espacio de separación. Por ejemplo, «treinta y dos por ciento» se representa mediante *32 %* y significa 'treinta y dos de cada cien'. También puede ser representado:

El símbolo del porcentaje.

%

y, operando:

El 32 % de 2000, significa la parte proporcional a 32 unidades de cada 100 de esas 2000, es decir: 640 unidades en total.

El porcentaje se usa para comparar una fracción (que indica la relación entre dos cantidades) con otra, expresándolas mediante porcentajes para usar 100 como denominador común. Por ejemplo, si en un país hay 500 000 enfermos de gripe de un total de 10 millones de personas, y en otro hay 150 000 enfermos de un total de un millón de personas, resulta más claro expresar que en el primer país hay un 5 % de personas con gripe, y en el segundo hay un 15 %, resultando una proporción mayor en el segundo país.

El símbolo % es una forma estilizada de los dos ceros. Evolucionó a partir de un símbolo similar sólo que presentaba una línea horizontal en lugar de diagonal (c. 1650), que a su vez proviene de un símbolo que representaba «P cento» (c. 1425).

Símbolos relacionados incluyen ‰ (por mil) y ‱ (por diez mil, también conocido como un punto básico), que indican que un número se divide por mil o diez mil, respectivamente.

REPRESENTACION

Como fracción

El tanto por ciento se divide entre 100 y se simplifica la fracción. Ejemplo:

Para saber como se representa el 10 % en fracción se divide y luego se simplifica:

Porcentaje

La fracción común se multiplica por el número que sea necesario para que el denominador sea 100 y se toma el numerador, que será el porcentaje.

Ejemplo: Para representar 1/10 como un porcentaje se hace la operación siguiente:

Equivalencia entre un porcentaje considerable y sus fracciones

100 %	90 %	80 %	75 %	70 %	66,(6) %	60 %	50 %	40 %	33,(3) %	30 %	25 %	20 %	15 %	12,5 %	10 %	5 %
$1/1$	$9/10$	$4/5$	$3/4$	$7/10$	$2/3$	$3/5$	$1/2$	$2/5$	$1/3$	$3/10$	$1/4$	$1/5$	$3/20$	$1/8$	$1/10$	$1/20$

Obtener un tanto por ciento de un número

Para obtener un tanto por ciento de un número simplemente se multiplica. Por ejemplo, el 25 % de 150 es 37,5 . Una forma equivalente de tratar esta operación es considerar que se multiplica por la cifra y se divide por cien (pues 0,01 = 1/100).

Alternativamente, en un método muy habitual antaño, se construye una regla de tres simple directa. Así, para calcular el 25 % de 150 se hace la regla de tres: simplemente se multiplica

cruzado y divide por el que queda solo o en conjunción con el restado.

Por tanto: 37,5 es el 25% de 150.

El **porcentaje** o **tanto por ciento (%),** es una de las aplicaciones más usadas de las **proporciones o razones** **.**

El porcentaje es una forma de **comparar** cantidades, es una unidad de referencia que relaciona una **magnitud (una cifra o cantidad)** con el **todo que le corresponde (el todo es siempre el 100)** , considerando como unidad la centésima parte del todo.

Ejemplos:

1 centésimo $= \frac{1}{100}$

5 centésimos $= \frac{5}{100}$

50 centésimos $= \frac{50}{100}$

Nota importante. No olvidar que las fracciones deben expresarse siempre lo más pequeñas posible, deben ser fracciones irreductibles.

¿Qué significa 50 %?: Significa que de una cantidad que se ha dividido en cien partes se han tomado 50 de ellas, o sea, la mitad.

¿Qué significa 25 %?: Significa que de un total de 100 partes se han tomado 25, o sea ¼ (25/100 al simplificar por 5, se reduce a ¼).

Cálculo de Porcentaje

El Porcentaje o Tanto por ciento se calcula a partir de variables **directamente proporcionales** (significa que si una variable aumenta la otra también aumenta y viceversa).

En el cálculo intervienen cuatro componentes:

Cantidad Total ---- 100 %
Cantidad Parcial ---- Porcentaje Parcial

Ejemplo

(Cantidad total) Bf. 1.000 - equivale al - 100 % (porcentaje total)
(Cantidad parcial) Bf. 500 - equivale al - 50 % (porcentaje parcial)

Existen tres situaciones o tipos de problemas que pueden plantearse. Éstos son :

1.- Dada una cantidad total, calcular el número que corresponde a ese porcentaje (%) parcial :

Ejemplo: ¿Cuál (cuanto) es el 20% de 80?

	Cantidad	**Porcentaje**
Total	80	100
Parcial	x	20

Para resolverlo, se hace:

$$\frac{80}{\mathbf{x}} = \frac{100}{20}$$

Resolvemos la incógnita (x):

$$\mathbf{x} = \frac{80 \cdot 20}{100}$$

Haciendo la operación, queda:

$$\mathbf{x} = \frac{1.600}{100}$$

Simplificando, queda:

$$\mathbf{x} = 16$$

Respuesta: el 20 % de 80 es 16.

2.- Calcular el total, dada una cantidad que corresponde a un porcentaje de él .

Ejemplo: Si el 20 % de una cierta cantidad total es 120 ¿Cuál es el total?

Cantidad	**Porcentaje**
x	100
120	20

Para resolverlo, se hace:

$$\frac{x}{120} = \frac{100}{20}$$

Resolvemos la incógnita (x):

$$x = \frac{100 \cdot 120}{20}$$

Haciendo la operación, queda:

$$x = \frac{12.000}{20}$$

Simplificando, queda:

$$x = 600$$

Respuesta: 120 es el 20 % de un total de 600.

3.- Dado el total y una parte de él calcular que % es esa parte del total .

Ejemplo: ¿ Qué porcentaje es 40 de 120?

Cantidad	Porcentaje
120	100
40	x

Para resolverlo, se hace:

$$\frac{120}{40} = \frac{100}{x}$$

Resolvemos la incógnita (x):

$$x = \frac{100 \cdot 40}{120}$$

Haciendo la operación, queda:

$$x = \frac{4.000}{120}$$

Simplificando y haciendo la división, queda:

$\mathbf{x} = 33{,}33$

Respuesta: 40 es el 33,33 % de 120.

cualquier porcentaje se puede expresar en forma de fracción o número decimal y, a su vez, cualquier número decimal o fracción se puede expresar en porcentaje:

Porcentaje	**Se lee**	**Fracción**	**Decimal**	**Significado**
10%	Diez por ciento	10/100	0,1	10 de cada 100
30%	Treinta por ciento	30/100	0,3	30 de cada 100
3%	Tres por ciento	3/100	0,03	3 de cada 100

Cálculo de porcentajes

Existen dos formas para hallar un porcentaje o tanto por ciento

- Para calcular el porcentaje de una cantidad, multiplicamos la cantidad por el número que indica el porcentaje y dividimos el resultado entre 100.
  Ejemplo:
  El 20% de los estudiantes de un colegio, que tiene 240 alumnos, practica deporte. ¿Cuántos estudiantes practican deporte?
  Para hallar la respuesta multiplicamos 240 por 20 y dividimos el resultado entre 100:
  $240 \cdot 20 = 4.800 \;;\; \frac{4.800}{100} = 48$
  Por tanto, el 20% de 240 alumnos = 48 alumnos.
- Para calcular el porcentaje de una cantidad, multiplicamos la cantidad por la expresión decimal de dicho porcentaje.
  Ejemplo: Observa esta igualdad:
  $20\% = \frac{20}{100} = 0{,}2$
  Para calcular el 20% de 240, basta con multiplicar 240 por 0,2:
  240 · 0,2 = 48
  Incrementos
  Un incremento se produce cuando a una cantidad se le suma un porcentaje de la misma para obtener una cantidad mayor.
  Ejemplo: Si una camiseta, sin el 12% de IVA, cuesta 1200,00 para saber cuánto cuesta con IVA hay que:
- Calcular el incremento que sufre el precio de la camiseta. Para ello, hallamos el porcentaje de la cantidad (12% de 1200,00): 1200 x 0,12 = 144 (0,12 es la expresión decimal del porcentaje 12%)
- Sumar la cantidad (1200,00) y su incremento (144) para obtener el precio final: 1200,00 + 144 =1214

El precio de la camiseta tiene un incremento debido al IVA y, por tanto, es necesario disponer de un total de1214 Bolivares para comprarla.

Descuentos

Un descuento se produce cuando a una cantidad se le resta un porcentaje de la misma para obtener otra cantidad menor.

Ejemplo: Vamos a calcular el precio de un libro que antes costaba 42,00 bolivares y ahora tiene el 5% de descuento:

- Calculamos el descuento que sufre el precio del libro. Para ello, hallamos el porcentaje de la cantidad (5% de 42,00): 42,00 · 0,05 = 2,10 (0,05 es la expresión decimal del porcentaje 5%).
- Restamos la cantidad (42,00) menos su descuento (2,10) para obtener el precio final: 42,00 - 2,10 = 39,90 bolivares El precio del libro tiene un recuento y, por tanto, habría que disponer de 39,90 bolivares para comprarlo.

Tanto por 1 y tanto por 1.000

Puesto que un tanto por ciento es una proporción de un número de partes por cada 100, el tanto por uno y el tanto por mil son proporciones de un número de partes por cada 1 o por cada 1.000 respectivamente. El tanto por ciento, por uno o por mil son sólo diferentes maneras de expresar un porcentaje.

Es lo mismo decir que se divide una tarta en 100 partes y se cogen 25 que decir que se cogen 0,25 de una tarta, o que se divide en 1.000 partes y se cogen 250. Por tanto, el 0,25, el 25 % o el 250 por mil son expresiones equivalentes y significan lo mismo.

En realidad, no es más que multiplicar o dividir tanto el numerador como el denominador por 10 ó 100, según cada caso.

Aplicaciones de los porcentajes

Los porcentajes se usan para:

- Relacionar una parte con el todo: **Ejemplo:** "El 58% de los aspirantes a ingresar en la Universidad son mujeres".
- Determinar una proporción entre dos cantidades: **Ejemplo:** "La proporción de levadura y harina para el bizcocho es del 3%".
- Describir a la población, indicando el peso relativo de una magnitud sobre ella. **Ejemplo:** "El 16% de la población tiene estudios superiores". Gran parte de la estadística se expresa en porcentajes.
- Determinar la variación relativa de una cantidad: **Ejemplo:** "El nivel del agua almacenada en los embalses ha subido un 8% en lo que va de año".

El interés bancario

Las entidades financieras (bancos, cajas de ahorros, etc.) dan a sus clientes un interés por tener depositado su dinero. Es directamente proporcional a la cantidad guardada y al tiempo que dura el depósito, y se mide en tanto por ciento.
Cuando se pide un préstamo al banco también se paga un interés.

Ejemplo:

La caja de ahorros local ofrece a Marta un 4% anual para los 600.000 bolivares que tiene ahorrados. ¿Qué interés obtendrá Marta por su capital a final de año?
Un interés del 4% anual significa que de cada 100 Bolivares obtiene 4 al año.
Por tanto,
600000. 4/100 = 24000
Pero ¿y si Marta guarda el dinero en la caja durante 4 años?
En cuatro años le producirá cuatro veces esa cantidad:

Cálculo del interés bancario

$$I = \frac{c \cdot r \cdot t}{100}$$

Donde:

- **I** es el **interés** bancario. **r** es el **rédito**
- **c** es el **capital**. **t** es el **tiempo**.

1. Porcentaje o tanto por ciento.

En la tele o la radio habrás oído que un Banco ha tenido un 7 por ciento de beneficios. Esto quiere decir que por cada 100 monedas ha conseguido 7 más y ahora tiene 107 monedas. El porcentaje de beneficio ha sido el 7 %. Porcentaje o tanto por ciento quiere decir lo mismo. Otro ejemplo: En una ley había una ley de IVA que decía que todos los comerciantes pagarían al Estado un impuesto del 6 por ciento (6 %) de todas las ventas. Si una tienda ha vendido 100 bolivares pagará al Estado 6 bolivares; si hubiese vendido 200 bolivares, tendría que pagar 12 Bolivares.

2.- Rebajas.

En varias épocas del año vemos en los comercios el cartel de rebajas. Si el cartel dice 20 % esto quiere decir que por cada 100 monedas que valga el producto me rebajarán 20 monedas. Si compro un pañuelo que vale 100 monedas, me rebajarán 20 y tendré que pagar 80. Para hallar el tanto por ciento de una cantidad se multiplica ese tanto por la cantidad y se divide por 100. Así el 20 % de 2500 = (20 x 2500) : 100 = 500. También se puede hacer así: 2500 x 0,20 = 500.

3.- Interés simple.

Cuando una familia gana más dinero del que gasta, el dinero sobrante lo puede poner en un Banco o Caja de Ahorros o invertirlo en bonos del Estado y recibirá un beneficio. El beneficio se llama interés. Si ha ingresado 100 bolivares en una Caja de Ahorros y le dan un interés del 2 %, al cabo de 1 año tendrá 102 bolivares. En 2 años tendría 104 bolivares.

La fórmula del interés simple es: interés = capital x % x años   Si pongo en un Banco 400 bolivares al 3 % de interés durante 8 años obtendré un interés de: n las cantidades   400 x (3/300) x 8 = 400 x 0,03 x 8 = 96. ¿Cuánto dinero tendré entonces? Pues la suma de 400 + 96 = 496 bolivares.

4.- Préstamos.

Supongamos que una pareja de novios se quieren casar y desean comprarse un piso. Disponen de unos ahorros pero les faltan 12000000 bolivares, por lo que van a un Banco a pedir que les presten ese capital. Llegan a un acuerdo y el Banco les hace un préstamo de 12000000 bolivares al 5 % durante 10 años. Estos novios tendrán que devolver el capital y pagar el interés correspondiente.

Al final del año 10 habran pagado:

12000000 x 0.05 x 10 = 6000000 de interés más los 12000000 del capital inicial

Ejemplo: Si sacamos un préstamo de 1400000 bolivares al 5 % durante 4 años, el interés que tendremos que pagar será: 1400000 x 0,05 x 4 = 280000 bolivares Al Banco tendremos que pagarle esos 280000 bolivares más los 1400000 que nos prestaron. En total 1680000 bolivares.

Uso y manejo de gráficos de los porcentajes

*El Porcentaje viene a ser, el numero de partes q se tomaron de un entero que se divido entre 100 partes.

(% símbolo) 30% representan = 30/100 = 0.30

*Forma fraccionaria Forma decimal.

3.2% ⟶ 3.2/1000 = 0.032

0.42% ⟶ .42/100 = 42/10000 = 0.0042

*Conversión de decimal a tanto por ciento.

0.75 ⟶ 75/100 = 75%

0.32 ⟶ 32/1000 = 3.2/100 = 3.2%

*Conversión de fracción a tanto por ciento.

En este caso se obtiene una fracción equivalente

3/5 = x/100

x=(100)(3)/5

x= 60 ∴ 3/5 = 60/100 = 60%

Ejemplos:

- El uso de los porcentajes puede ser definido o aplicado de la siguiente manera(uso natural o fraccionaria)

Ejercicio: convierte a%

- a) 0.82 = 82/100 =82%
- b) 0.042 = 42/1000 = 4.2/100 = 4.2%
- c) 0.0345 = 345/10000 = 3.45/100 = 3.45%
- d) 1.25 = 125/100 =125%
- e) 2.034 = 2034/1000 = 203.4/100 = 203.4%

Convierte de fracción a %

- a) 9/10= x/100 =(100)(9)/10 =900/10 =90/100 = 90%
- b) 56/58 = x/100 =(100)(56)/58 = 560/58 =96.5/100 =96.5%
- c) 4/5 =x/100= (100)(4)/5 =400/5=80/100 =80%
- d) 1/3 =x/100=(100)(1)/3 =100/3 = 33.3/100 = 33.3%

*En Conclusión el uso de los porcentajes deriva dependiendo el uso que se le dé :
Ejemplo:
*Comisión
*Descuento
*Aumento
*Impuesto a las ventas
*Precio con impuesto a las ventas
*Envío
*Interés simple y principal
*Consejos
*consejos para la estimación

Cómo hallar un porcentaje o tanto por ciento de un número

Para hallar 24% o 8% o cualquier otro porcentaje de alguna cantidad, puedes primero hallar el 1% de esa cantidad, y luego multiplicar el resultado por 24 ó 8 u otro número dependiendo de cuál sea tu tanto por ciento.

Ejemplos:
Halla 7% de Bs41.50. Primero calcula Bs41.50/100 para obtener 1% ó 1/100 de Bs41.50. Luego multiplica eso por 7. Respuesta: Bs2.905.

Pero esa cuenta es la misma que (7/100) x Bs41.50. Recuerda que 7/100 es 0.07 como un decimal. En la mayoría de las cuentas, es más práctico usar decimales en lugar de esa regla de "divide por 100, luego multiplica".

Pues, para hallar 7% de Bs41.50, yo simplemente calculo 0.07 x Bs41.50 con una calculadora. Es tan simple como convertir el porciento en un decimal: 7% es 0.07.

Otra posibilidad es una regla: *se multiplica por el "tanto" y se divide por el "ciento"*:

Halla 78% de 905. El número 78 es el "tanto". Entonces multiplicamos 78 × 905, y después dividimos por cien: 78 × 905 / 100 = 705.9.

Cálculo mental y tanto por ciento

Para hallar 10% de algo, podrías primero dividir por 100 y luego multiplicar por 10, pero es mucho más rápido simplemente dividir por 10.

Por ejemplo:
10% de 90 is 90/10 = 9.
10% de 250.6 is 25.06.

Cuando sabes cómo hallar el 10% de un número, es my fácil hallar 20%, 30%, 40%, etc., y 5% de cualquier número sólo usando el 10% como un punto de comienzo.

Por ejemplo:
Halla el 20% de 52. Primero halla el 10% de 52, lo cual es 5.2, luego sencillamente doblamos eso; es decir 5.2 + 5.2 = 10.4.

Ejemplo usando un porciento de descuento

Ejemplo:
Un cierto objeto vale Bs.48 y tiene un descuento del 15%. ¿Cuál es el precio ahora?

Vamos a suponer que dividamos la cantidad de Bs.48 (el precio total del objeto, sin descuento) en 100 partes iguales. Luego tendriamos que quitar 15 de esas partes. Eso nos dejaria 85 de las partes, o el 85% del total. Pero, ¿quál es el monto de bolívares que queda? Ten cuidado, no sería correcto quitar Bs.15 sino el 15% del total.

El estudiante necesita darse cuenta de que Bs48 es 100% - "un entero", y que se quitan 15 de esas 100 partes.

Solución:
10% de Bs.48 será Bs.4.80.
5% de Bs.48 será Bs.2.40 (la mitad de 10%).
Entonces 15% de Bs.48 es Bs.7.20. Réstalo del precio original para hallar el precio con descuento de Bs40.80. Con una calculadora, yo simplemente calcularé 0.85 x Bs.48. (ASEGURATE DE ENTENDER DE DONDE VIENE EL 0.85.)

¿Qué porcentaje es?

En una clase de 34 estudiantes, 12 son muchachas. ¿Qué porcentaje de estudiantes son muchachas?

Aquí, el "entero" es 34, la clase entera. El problema es, si ese "entero" de 34 fuera dividido en 100 partes, ¿cuántas de esas partes necesitariamos para representar las 12 estudiantes?

O, podrías comparar 34 personas lado-al-lado con 100 de "algo". Imagina que todas las 34 personas estén una al lado de la otra formando una larga fila y que las 12 muchachas ocupen la última parte de esta fila. Ahora, si pudieras hallar 100 unidades de medida iguales que en su totalidad midieran tanto cuanto la longitud total de la fila de personas, ¿cuantás de las unidades coincidirían con las 12 muchachas?

Este ejemplo nos guía a la proporción de tanto por ciento:

$12/34 = x / 100$

Resolviendo x, obtenemos
$x = (12/34) \times 100.$

Al resolver este tipo de propoción, se nota que cada vez sólo comparamos la parte con la totalidad (el entero) usando división, como 12/34 en el ejemplo anterior. Así es bastante rápido simplemente escribir esa comparación de parte/totalidad directamente, cuando estamos resolviendo problemas de este tipo, en donde hay que determinar el porcentaje que representa una cantidad con respecto a un total.

Por ejemplo:
Una guitarra de Bs.199 tiene un descuento de Bs.40. ¿Cuál es el porcentaje de descuento?

Aquí, "el entero" es el precio original (total), Bs.199. Se pide qué porcentaje representa 40 con respecto a 199. Sólo calculas 40/199, comparando la parte con el entero. Calculando: 40/199 = 0.201005025, cantidad que luego se convierte en un porcentaje multiplicandola por 100. La respuesta es 20.1%.

Ejemplo de resolución de un problema

Si una bicicleta vale 250 000 bolivares y el almacén que la vende tiene un descuento del 30% sobre ella. ¿Cuánto valen 6 de esas bicicletas?

*Se necesita primero hallar el precio de **una** bicicleta, luego sencillamente multiplicamos el resultado por 6.*

Se han reducido los precios de un 30%, lo que significa que "queda" 70% del precio de la bicicleta. Hallamos entonces 70% de 250 000.

En esta ocasión es fácil primero hallar el 10% de 250 000, lo cual es 25 000. Luego lo multiplicamos por siete: 7 x 25 000 = 175 000, lo cual es el nuevo precio de una bicicleta.

Y seis veces eso es 6 x 175 000 = 1 050 000 Bolivares.

Instrucciones:

*Al hablar de un **tanto por ciento o porcentaje** nos referimos a una cantidad de cada 100 unidades, es decir, un número expresado en fracción con denominador 100. Los tantos por ciento se utilizan para establecer relaciones entre dos cantidades, de modo que el tanto por ciento indica la parte proporcional a ese número de cantidades de cada cien.*
*Para representarlos, se utiliza el **símbolo %** que en matemáticas equivale al factor 0,01. Por ejemplo, al calcular el 25% de una cantidad, estaremos buscando veinticinco de cada cien.*

*A la hora de calcular un tanto por ciento, se nos facilitará **el porcentaje en cuestión y la cifra** sobre la que debemos aplicarlo. No es válido decir que calculamos un tanto por ciento a secas, sino que necesitaremos saber sobre qué cantidad lo debemos calcular.*
Por ejemplo, supongamos que debemos calcular el 30% de 1200.

*Para calcular este tanto por ciento, deberemos realizar la siguiente operación matemática: **multiplicar el número del porcentaje por la cantidad**:*
Ejemplo: 30 x 1200 = 36.000

*Una vez obtenido ese resultado, será necesario **dividir la cifra obtenida entre 100**:*
Ejemplo: 36.000 / 100 = 360

*De esta forma, ya hemos calculado el tanto por ciento y podremos decir que**el 30% de 1200 es 360.***

*Sin embargo, como apuntábamos en el primer paso, un tanto por ciento es **equivalente al factor 0,01** por lo que otra forma de calcular un porcentaje será:*
Siguiendo con el ejemplo de calcular el 30% de 1200, multiplicaremos 30 por 0,01:
30 x 0,01 = 0,3
*A continuación, tan solo deberemos **multiplicar este factor por la cifra** sobre la que calculamos el tanto por ciento, es decir:*
0,3 x 1200 = 360
Y obtendremos el mismo resultado que al aplicar el método anterior para calcular un porcentaje.

Regla de tres

MÉTODO PRÁCTICO
Primero hay que identificar las magnitudes que intervienen en la situación y qué tipo de regla de tres es.
A las magnitudes que sean directamente proporcionales con la incógnita se les pone debajo un signo más (+) y encima un signo menos (–), a las magnitudes que sean inversamente proporcionales con la incógnita se le pone debajo un signo menos (–) y encima un signo más (+) y el valor de la incógnita x será igual al valor conocido de su misma especie y siempre se le pone el signo más (+).

Dos ruedas están unidas por una correa transmisora. La primera tiene un radio de 25 cm y la segunda de 75 cm. Cuando la primera ha dado 300 vueltas, ¿cuántas vueltas habrá dado la segunda?

Soluciones:

25 cm $\xrightarrow{I}$ 300 vueltas

75 cm $\longrightarrow$ x vueltas

$$\frac{75}{25} = \frac{300}{x} \qquad x = \frac{300 \cdot 25}{75} = 100 \text{ vueltas}$$

Seis personas pueden vivir en un hotel durante 12 días por Bs. 792 . ¿Cuánto costará el hotel de 15 personas durante ocho días?

Soluciones:

6 personas $\xrightarrow{D}$ 12 días $\xrightarrow{D}$ 792 Bs.

15 personas $\longrightarrow$ 8 días $\longrightarrow$ x Bs.

$$\frac{6}{15} \cdot \frac{12}{8} = \frac{792}{x} \qquad x = \frac{15 \cdot 8 \cdot 792}{6 \cdot 12} = \text{ 1320 Bs.}$$

Con 12 latas conteniendo cada uno ½ kg de pintura se han pintado 90 m de pared de 80 cm de altura. Calcular cuántos latas de 2 kg de pintura serán necesarios para pintar una pared similar de 120 cm de altura y 200 metros de longitud.

Soluciones:

½ kg $\xrightarrow{I}$ $90 \cdot 0.8\ m^2$ $\xrightarrow{D}$ 12 botes

2 kg $\longrightarrow$ $200 \cdot 1.2\ m^2$ $\longrightarrow$ x botes

$$\frac{2}{0.5}\cdot\frac{90\cdot 0.8}{200\cdot 1.2}=\frac{12}{x} \qquad x=\frac{12\cdot 0.5\cdot 200\cdot 1.2}{2\cdot 90\cdot 0.8}=10 \text{ botes}$$

11 obreros labran un campo rectangular de 220 m de largo y 48 de ancho en 6 días. ¿Cuántos obreros serán necesarios para labrar otro campo análogo de 300 m de largo por 56 m de ancho en cinco días?

Soluciones:

$220 \cdot 48\ m^2 \xrightarrow{D} 6$ días $\xrightarrow{I} 11$ obreros

$300 \cdot 56\ m^2 \longrightarrow 5$ días $\longrightarrow$ x obreros

$$\frac{220\cdot 48}{300\cdot 56}\cdot\frac{5}{6}=\frac{11}{x} \qquad x=\frac{300\cdot 56\cdot 6\cdot 11}{220\cdot 48\cdot 5}=21 \text{ obreros}$$

Seis grifos, tardan 10 horas en llenar un tanque de 400 m³ de capacidad. ¿Cuántas horas tardarán cuatro grifos en llenar 2 tanques de 500 m³ cada uno?

Soluciones:

6 grifos $\xrightarrow{I}$ 10 horas $\xrightarrow{D}$ 1 tanque $\xrightarrow{D}$ 400 m^3

4 grifos $\longrightarrow$ x horas $\longrightarrow$ 2 tanques $\longrightarrow$ 500 m^3

$$\frac{10}{x} = \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{400}{500} \qquad \frac{10}{x} = \frac{1600}{6000} \qquad x = \frac{60000}{1600} = 37.5\,\text{horas}$$

La **regla de tres simple** es utilizada para resolver problemas en donde las cantidades guardan una relación directa o inversa.

Una relación directa es aquella en la cual si una de las cantidades aumenta, las otras aumentan en la misma proporción.

Una relación inversa es cuando al aumentar una, la otra disminuye en la misma proporción.

La forma de escribir la regla de tres es la siguiente: se señala con una flecha la relación entre las cantidades. Una de las relaciones tendrá una incógnita, que es la que despejaremos. Se escribe una relación a continuación de la otra separadas por los dos puntos, para indicar la relación.

25 → 14: X → 21

Ahora tenemos los términos ordenados en relación a los dos puntos. El primer y último término los llamamos extremos y los que está pegados a los dos puntos son los centros.

Es importante observar el orden de los términos, ya que al cambiar, también cambia la relación:

25 → 14: X → 21 no es igual que 25 → 14: 21 → X

Por lo que es importante saber a qué corresponde cada una de las cantidades para usar el mismo orden en los dos miembros de la relación.

En la regla de tres, cuando la incógnita está en el centro, se despeja multiplicando los extremos y dividiéndolos en el término conocido del centro. Cuando la incógnita está en los extremos, se despeja multiplicando los centros y dividiéndolo entre el extremo conocido.

Con los ejemplos que citamos, sería así:

25 → 14: X → 21 = (25 x 21) / 14 = 525 / 14 = 37.5

25 → 14: 21 → X = (14 x 21) / 25 = 294 /25 = 11.76

10 ejemplos de regla de tres simple.

1. Si 2 litros de gasolina cuestan Bs.18.20, ¿Cuánto litros se pueden comprar con Bs.50.00?

2 → 18.20

X → 50

X = (50 x 2) / 18.20 = 5.49 lts.

2. Un automóvil recorre 30 km en un cuarto de hora, ¿Cuántos kilómetros recorrerá en una hora y media?

30 → .25

X → 1.5

X = (30 x 1.5)/.25 = 180 Km

3. Una taza de agua eleva su temperatura en .5 °C al estar 45 minutos al sol, ¿Cuántos grados se elevará despué́s de 2 horas?

.5 → 45

X → 120

X = (120 x .5) / 45 = 1.33°C

4. Si el 25% de una cantidad es 68, ¿Cuánto es el 43% de esa misma cantidad?

68 → 25

X → 43

X = (68 x 43) / 25 = 116.96

5. ¿Cuál es la cantidad del ejemplo anterior?

68 → 25

X → 100

X = (68 x 100) / 25 = 272

6. Si un niño camina 3 km en una hora y cuarto, ¿Cuántos kilómetros recorrerá en 3 horas?

3 → 1.25

X → 3

X = (3 x 3) / 1.25 = 7.2 km

7. Un automóvil recorrió 279 km con 61 lts de combustible, ¿Cuántos kilómetros recorre por litro?

279 → 61

X → 1

X= (279 x 1) / 61 = 4.57 km

8. Una vagoneta recorre 40 km en 72 minutos, ¿en cuánto tiempo recorrerá a 68 km?

40 → 72

68 → X

X = (72 x 68) / 40 = 122.4 minutos

9. En una escuela hay 467 alumnos y el día de hoy faltaron 63. ¿Qué porcentaje de alumnos estuvo ausente?

467 → 100

63 → X

X = (63 x 100)/467 = 13.49%

10. Un trabajador gana por jornada de 8 horas Bs.125.50, si su jornada aumenta en 2.5 horas ¿Cuál será su nuevo salario?

8 → 125.50

10.5 → X

X = (125.50 x 10.5) / 8 = 164.718

La razón

La **razón** es el **cociente entre dos números o cantidades comparables entre sí**, que se expresa como una fracción. Es decir, si tenemos un número **a** y un número **b**, la razón entre ellos se representa mediante la fracción ab
Vamos a ver algunos ejemplos:

La razón entre 6 y 2 es 3, ya que 6/2=3
La razón entre 1 y 0,2 es 5 , ya que 1/0.2=5
La razón entre 100 y 10 es 10 , ya que 100/10=10
Si quieres practicar, puedes aplicar el concepto de razón en los siguientes ejercicios:

1. ¿Cuál es la razón entre los números 3 y 81?
2. ¿Cuántas veces es 224 mayor que 16?
3. ¿Cuántas veces es 3 menor que 17?

4. ¿Cuál debe ser el valor de “x” para que la razón entre 8 y “x” sea 1,6?
5. Piensa en dos números cuya razón sea 11

La proporción

Pero… ¿Podemos encontrar **distintas parejas de números que tengan entre sí una misma razón**?

¡Pues claro! Hay infinitas parejas de números que cumplan esta condición. Por ejemplo, vamos a pensar en distintas parejas de números cuya **razón** sea **2,5**:

5 y 2; 10 y 4; 100 y 40; 2,5 y 1…

Esto lo **representamos** del siguiente modo: 52=104=10040=2,51=2,5

Todas estas parejas de números **son proporcionales entre sí**.

Por lo tanto, decimos que los números a, b, c y d forman una proporción si la razón entre a y b es la misma que entre c y d. Esto se escribe: ab=cd

Y se lee: **a** es a **b** como **c** es a **d**

En esta proporción, **a** y **d** son los *extremos*, y **b** y **c** son los *medios*. En las proporciones se cumple que ***el producto de los medios es igual que el producto de los extremos***.

Así, se cumple que **a** x **d** = **b** x **c**

Ejercicios de números proporcionales

Por último, puedes practicar algunos ejercicios de números proporcionales, como:

1. ¿Forman proporción las siguientes razones?

a) 3020 y 200110
b) 80050 y 40,25
c) 34 y 1575
2. ¿Cuál debe ser el valor de **x** para que entre las siguientes parejas se cumpla la proporción?
a) 615 y x10

1. Un avión recorre cierta distancia en 5 horas empleando una velocidad de 600 km/h. ¿Qué velocidad debe tener otro avión similar para recorrer el mismo trayecto en 3 horas?.

   Se trata de un problema de regla de tres simple inversa, pues, las magnitudes *velocidad* y *tiempo* son inversamente proporcionales, es decir, para una misma distancia, a mayor velocidad menor tiempo.

   Luego:

	Velocidad(km/h)	**Tiempo (horas)**
Supuesto	600	5

Pregunta	x	3
		I.P.

Es decir: x = 600 (5/3) = **1000 km/h**

2. Si en una fotografía un niño mide 4cm cuando su estatura real es de 120 cm, ¿cuál será la estatura real de su hermano, si en la fotografía mide 5 cm?.

   Se trata de un problema de regla de tres simple directa, pues, las magnitudes *estatura* y *medida en la fotografía* son directamente proporcionales, es decir, una persona de mayor estatura medirá más en la fotografía.

   Luego:

	Estatura (cm)	**Medida en la fotografía (cm)**
Supuesto	120	4
Pregunta	x	5
		D.P.

Es decir: x = 120(5/4) = **150 cm**

3. Para hacer una construcción, 35 obreros trabajaron 270 días de 8 horas diarias. ¿Cuántos obreros se hubieran necesitado para hacer el mismo trabajo en 180 días trabajando 7 horas diarias?

   Se trata de un problema de regla de tres compuesta.

	Nº de obreros	**Nº de días**	**Nº de horas diarias**
supuesto	35	270	8
pregunta	x	180	7
		I.P.	I.P.

Luego: x = 35(270/180)(8/7) = **60 obreros**

4. En 18 días un viajero, caminando 5 horas diarias, ha recorrido 900 km. ¿Cuántos km recorrerá en 15 días caminando 8 horas diarias?

   Se trata de un problema de regla de tres compuesta.

	Nº de días	**Nº de horas diarias**	**Distancia (km)**
Supuesto	18	5	900
Pregunta	15	8	x

D.P. D.P.

1. Problemas de reducción a la unidad.

He aquí un problema: 3 cajas de bombones valen 60000 Bolivares. ¿Cuántos Bolivares vale una caja?

Una caja valdrá 60000 entre 3 cajas = 20000 cada caja.

Este tipo de problemas se llaman de "reducción a la unidad" porque se busca de lo que toca de una cosa para una unidad de la otra.

De problema anterior se podría preguntar otra cosa: ¿Cuántas cajas puedo comprar con 10000 Bolivares?

En este caso habrá que dividir las cajas entre los Bolivares. 3 cajas entre 60000 Bolivares = 0,5 cajas puedo comprar con 10000 bolivares.

Copia estos problemas en tu cuaderno y contesta con la solución correcta.

1. Si 8 kilos de manzanas valen 16 Bolivares, ¿cuántos Bolivares vale un kilo?	
2. Del problema anterior, ¿cuántos kilos podré comprar con diez Bolivares?	
3. Tengo 12 botellas de vino y me han costado 12345 Bolivares. ¿Cuántos Bolivares vale una botella?	
4. Del problema anterior, ¿cuántas botellas puedo comprar con un 1000 Bolivares?	
5. Si 500 ruedas de metal pesan 3000 kilos, ¿cuántos kilos pesa cada rueda?	
6. Del problema anterior, ¿cuántas ruedas podré hacer con 100 kilo?	

2.- Regla de tres directa.

Después de saber cuánto vale una unidad podemos saber cuánto valen otras unidades.
Una forma resumida es aplicar la regla de tres.
Veamos un ejemplo: 3 cajas de cigarros valen 600 Bolivares, ¿cuánto valdrán 10 cajas?
Nos dan tres datos y nos falta uno que es la incógnita.

Si 3 cajas (A) cuestan 600 Bolivares (B)
10 cajas (C) costarán x (D)

Un caja valdrá 200 bolivares (6:3) y 10 cajas 2000 bolivares(200 x 10). También multiplicamos (600 x 10) y dividimos por 3. Salen 200 bolivares.
Haciendo el problema por la regla de tres, multiplicamos los números medios B y C y dividimos por el extremo A; (6 x 10) : 3 = 200 Bolivares.
Hay que cuidar que las cantidades A y C sean de la misma especie. En este caso cajas.

Otro ejemplo: Hemos hecho el recorrido de 560 kilómetros con el vehiculo en 8 horas. Cúantos kilómetroa recorreremos en 12 horas.

Si en 8 horas (A) ------> 560 km (B)
en 12 horas (C) ------> x (D)

x = (560 x 12) : 8 = 6720 : 8 = 840 kilómetros.

En general, la regla de tres con magnitudes directamente proporcionales se resuelve multiplicando los términos medios (B y C) y dividiendo por el extremo A.

Resuelve estos problemas:

1. Unos 6 kilos de bombones cuestan 6,3 bolivares, ¿cuánto costarán 12 kilos?	
2. Un obrero fabrica 200 piezas en 5 horas. ¿Cuántas piezas puede fabricar en 48 horas?	
3. Un pintor tarde 3 horas en pintar 30 cuadros.¿Cuánto tardará en pintar 200 cuadros?	
4. Un montador cobra 72 bolivares por 40 horas de trabajo.¿Cuánto cobrará por 80 horas?	
5. Con 12 kilogramos de manzanas se obtienen 7 litros de sidra. ¿Cuántos litros se obtendrán con 48 kg?	

6. Si 8 metros de cable cuestan 13 bolivares, ¿cuánto costarán 16 metros?	

3.- Regla de tres inversa.

En las cantidades inversamente proporcionales al aumentar una, disminuye la otra.
Ejemplo: La velocidad de un automóvil y el tiempo que tarda en recorrer una distancia. A más velocidad, menos tiempo tardará.

Veamos este ejemplo: 12 albañiles construyen una casa en 60 días. ¿Cuánto tardarán 2 albañiles en construirla? (con menos albañiles tardarán más tiempo, luego es inversa).

Si 12 albañiles (A) tardan 60 días (B)
2 albañiles (B) tardarán x (D)

Un sólo albañil tardará (12 x 60) = 720 días. Dos albañiles, la mitad 720 : 2 = 360 días.
Con la regla de tres multiplicamos las dos primeras cantidades A y B y dividimos por la C.
D = (A x B) : C

En general, la regla de tres con magnitudes inversamente proporcionales se resuelve multiplicando los dos primeros términos (A y B) y dividiendo por el tercero (C).

Resuelve estos problemas:

1. Unos 30 soldados cavan una trinchera en 5 días. ¿Cuántos días le costarán a 15 soldados?	
2. Un coche de Caracas a Maracay tarda 3 horas a una velocidad de 80 kilómetros por hora. ¿Cuántas horas tardará a una velocidad de 120 km por hora?	
3. Unos 5 albañiles tardan 45 días en hacer un chalet. ¿Cuántos días tardarán en hacerlo 15 albañiles?	
4. Leyendo 20 páginas cada día terminé un libro en 33 días. ¿Cuántos días tardaré leyendo 30 páginas diarias?	

4.- Repaso de la regla de tres.

Realiza estos problemas averiguando si son directa o inversamente proporcionales:

1. Si 4 metros de hilo telefónico valen 32 bolivares, ¿cuánto costarán 7 metros?	
2. Si con 38 kilos de cebada obtenemos 3 cervezas, ¿cuántas cervezas saldrán de 114 kilos?	
3. Un tren de alta velocidad va de Caracas a Charallave en 1/2 horas a una velocidad de 150 kilómetros por hora.¿Cuántas horas tardará a una velocidad de 200 kilómetros por hora?	
4. Si 3 pares de zapatos cuestan 36000 bolivares, ¿cuánto costarán 5 pares?	
5. Si leyendo a una velocidad de 120 palabras por minuto puedo leer una novela en 7 horas, ¿cuántas horas me costará leerla si leo a 84 palabras por minuto?	
6. Si 12 electricistas hacen una instalación en 60 días, ¿cuánto tardarán 3 electricistas?	

ROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

Nueve albañiles, en 21 días trabajando 8 horas cada día, han pintado un edificio. ¿Cuántas horas diarias hubieran tenido que trabajar 4 albañiles, para hacer lo mismo en 7 días?

A) 55 B) 54 C) 53 D) 52

Problema 2

Una guarnición de 400 soldados situados en un fuerte tiene víveres para 180 días si consumen 900 gramos por hombre y por día. Si recibe un refuerzo de 100 soldados pero no recibirá víveres antes de 240 días. ¿Cuál deberá ser la ración de un hombre por día para que losvíveres puedan alcanzarles?

A) 540g B) 720g C) 420g D) 450g E) 675g

Solución:
Ordenando los datos tenemos:
Soldados días gramos
400 .... 180 900
500 .... 240 x
Entre soldados y víveres (gramos) la relación es inversa. Entre días y víveres(gramos) tambien, luego:
$x = 900·400/500·180/240$
$x = 540$
Respuesta: La ración de debe ser de 540 gramos.

Problema 3

Cinco orfebres hacen 12 anillos en 15 días. Si se desean hacer 60 anillos en 25 días. ¿Cuántos orfebres doblemente rápidos se deben contratar además de los que se tienen?
Solución:
Planteamos la siguiente regla de tres compuesta:
Orfebres Anillos Días
5 .... 12 15
x 60 25
Resolviendo
$x = 5·60·15/(12·25)$
$x = 15$
Luego de resolver la proporcionalidad establecida entre las distintas magnitudes, podemos reconocer que se necesitan 15-5=10 orfebres más, siempre que sean de rapidez normal, pero si son doblemente rápidos, sólo necesitarán la mitad de orfebres 10/2 = 5.
Respuesta: Se debe contratar a 5 orfebres.

Problema 4

Un pozo de 8m de díametro y 18m de profundidad fue hecho por 30 obreros en 28 días. Se requiere aumentar en 2m el radio del pozo y el trabajo será hecho por 14 hombres. ¿Cuánto tiempo demorarán?
A) 136 B) 135 C) 133 D) 130 E) 125
Solución:
Se debe relacionar las magnitudes número de obreros, número de días y volumen del pozo, mediante una regla de tres compuesta:

Obreros Días Volumen

30 .... 28 .... $\pi\cdot 4^2\cdot 18$

14 .... *x* .... $\pi\cdot 6^2\cdot 18$

Despejando *x*

$x = (30\cdot 28\cdot \pi\cdot 6^2\cdot 18)/(14\cdot \pi\cdot 4^2\cdot 18)$

x = 135 días

Respuesta: Los obreros se demoran 135 días.

Problema 5

Un boxeador le pega a una pera, de tal manera que da 5 golpes en 2 s. ¿Cuánto demora en dar 25 golpes a la pera?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 15

Solución:

Aquí las magnitudes que son proporcionales son el número de golpes con la cantidad de intérvalos que hay entre cada golpe y el tiempo que se demora en dar los golpes. Entonces podemos plantear la siguiente regla de tres:

Número Golpes Cant. intervalos Tiempo (s)

5 .... 4 2

25 .... 24....................... x

Resolviendo

$x = 2\cdot 24/4$

x = 12 s

Respuesta: El boxeador se demora 12 segundos.

Problema 6

Un pintor demora 40 minutos en pintar una pared cuadrada de 4 m de lado. ¿Cuánto demora en pintar otra pared cuadrada de 6 m de lado?

A) 60 B) 70 C) 80 D) 90 E) 100

Solución:

Aquí las magnitudes proporcionales son el tiempo que se demora en pintar la pared con el área de la pared pintada.

Superficie pintada (m^2) Tiempo(min)

$4\cdot 4$ 40

$6\cdot 6$ x

Despejamos x

$x = 40\cdot 36/16$

x = 90

Respuesta: El pintor se demora 90 minutos.

Problema 7

Cuatro tractores pueden remover 400 m^3 de tierra en 6 horas. ¿Cuánto demorarán seis tractores en remover 800 m^3 de tierra?

A) 3 h B) 4 h C) 8 h D) 10 h E) 12 h

Solución:

Se establece la relación de proporcionalidad entre el tiempo, con el volumen y el número de tractores. Entonces tenemos la siguiente regla de tres compuesta:

Nº de tractores Volumen(m^3) Tiempo(horas)

4 .... 400 6

8 .... 800 x

Entre las magnitudes tiempo y número de tractores hay una relación inversa y entre tiempo y volumen hay una relación directa, entonces:

x = 6·800/400·4/6

x = 8

Respuesta: Los seis tractores demorarán 8 horas.

Problema 8

Un grupo de 30 obreros debe terminar una obra en 20 días. Luego de 5 días, 5 obreros se retiran. ¿Cuánto demorarán los obreros restantes en terminar la obra?

A) 60 B) 70 C) 80 D) 90 E) 100

Solución:

Hay que tener en cuenta que además de las magnitudes"obreros-días", tambien hay que tener en cuenta la magnitud obra, entonces

Nº de obreros Nº días Obra

30 .... 5 .... 1/4

25 .... x 3/4

Aplicando la regla práctica

x = 5·30/25·(3/4)/(1/4)

x = 18 días

Respuesta: Los obreros restantes demoran 18 días en acabar la obra.

Problema 9

Un grupo de 20 mujeres debe ordeñar n vacas en 10 días. Luego de 4 días, se les unen 5 mujeres doblemente eficientes. ¿Cuántos días antes logran ordeñar todas las vacas?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Solución:
Las magnitudes a considerar son número de mujeres, número de días y vacas, se debe tener en cuenta que la doble eficiencia es representada por 2.

Nº de mujeres	Nº días	n vacas
20	10	2/5
20 + 2(5)	x	3/5

Hallamos x

$x = 4\cdot 20/30\cdot(3/5)/(2/5)$

$x = 4$

Respuesta: Como ya avanzaron 4 días, y para terminar se demoran otros 4 días, en total son 8 días. Entonces terminan de ordeñar las vacas en 10-8 = 2 días antes.

Problema 10

Diez obreros demorán 8 días en hacer una obra, trabajando 6 horas diarias. ¿Cuánto demoran 24 obreros trabajando 5 horas diarias, en hacer otra obra cuya dificultad es el cuádruple de la anterior?

A) 10 días B) 14 días C) 18 días D) 12 días E) 16 días

Solución:
Debemos considerar las magnitudes: obreros, días, horas diarias y dificultad.

Nº de obreros	días	Horas diarias	Dificultad
10	8	6	1
24	x	5	4

Aplicando la regla practica

$x = 8\cdot 10/24\cdot 6/5\cdot 4/1$

$x = 16$ días

Respuesta: Los obreros se demoran 16 días.

Problemas de regla de tres Compuestas

Problema modelo

Si 9 costureras hacen 135 pantalones en 4 horas. ¿Cuántos pantalones harán 15 costureras en 8 horas?

A) 200 B) 250 C) 400 D) 450 E) 500

Problema 1
Un grupo de 24 pintores demoran 5 días en pintar una fachada de 100 m^2, trabajando 12 horas diarias. ¿Cuánto demorarían 18 pintores en una fachada de 150 m^2, trabajando 8 horas diarias?
Respuesta: 15 días

Problema 2
Se sabe que 4 hornos industriales consumen 60 kg de carbón en 2 días. ¿Cuántos kilogramos de carbón consumirán 6 hornos industriales en 3 días?
Respuesta: 135 kg

Problema 3
Una tripulación de 20 marineros tiene víveres para 40 días. Al cabo del octavo día, 4 de los marineros son desembarcados por enfermedad. ¿Cuántos días podrán alimentarse los marineros restantes con lo que queda?
Respuesta: 40

Problema 4
Una cuadrilla de 40 trabajadores puede realizar una obra en 30 días. Al cabo de 2 días se retiran 5 trabajadores. ¿En cuántos días se terminará lo que falta de la obra?
Respuesta: 32

Problema 5
Se sabe que 3 carpinteros construyen 42 carpetas, en 2 días. ¿Cuántos días demorarán en construir 210 carpetas, 5 carpinteros?
Respuesta: 6

Problema 6
Para construir 600 metros de una carretera, 30 obreros han trabajado 12 días a razón de 10 horas diarias. ¿Cuántos días necesitan 36 obreros, trabajando 6 horas diarias, para construir otra carretera de 900 metros, si la dureza del terreno es el triple que la anterior?
Respuesta: 75

Problema 7
Un obrero, trabajando 28 días, ha hecho 56 m de una obra. ¿Cuánto tiempo demoran 9 obreros en 60 m de una obra, cuya dificultad con la primera es de 6 a 5?
Respuesta: 4

Problema 8

Se sabe que 4 costureras pueden confeccionar 60 vestidos en 12 días, a razón de 5 horas diarias. ¿Cuántos vestidos podrán confeccionar 2 costureras de triple rendimiento, a razón de 10 horas diarias durante 6 días?

Respuesta: 90

Problema 9

48 obreros pueden fabricar muebles en x días; cinco días después de iniciado el trabajo, 6 de los obreros reducen su eficiencia a la mitad y el trabajo se retrasa 2 días. Hallar x.

Respuesta: 35

Problema 10

10 tigres consumen 150 kilogramos de carne en 3 días. Si están con el triple de apetito, ¿en cuántos días 5 tigres consumirán 900 kilogramos de carne?

Respuesta: 12

01. Se sabe que "h" hombres tienen víveres para "d" días. Si estos víveres deben alcanzar para "4d" días. ¿Cuántos hombres deben retirarse?

a) $\frac{h}{3}$ b) $\frac{h}{4}$ c) $\frac{2h}{5}$
d) $\frac{3h}{5}$ e) $\frac{3h}{4}$

02. Ángel es el doble de rápido que Benito y la tercera parte que Carlos. Si Ángel hace una obra en 45 días, ¿En cuántos días harán la obra los 3 juntos?

a) 10 b) 12 c) 15
d) 20 e) 25

03. 16 obreros pueden hacer una obra en 38 días, ¿En cuántos días harán la obra si 5 de los obreros aumentan su rendimiento en un 60%?

a) 28 b) 29 c) 30
d) 31 e) 32

04. Un sastre pensó hacer un terno en una semana; pero tardó 4 días más por trabajar 4 horas menos cada día. ¿Cuántas horas trabajó diariamente?

a) 11 b) 7 c) 8
d) 14 e) 22

05. Doce hombres se comprometen a terminar una obra en 8 días. Luego de trabajar 3 días juntos, se retiran 3 hombres.
¿Con cuántos días de retraso terminan la obra?

a) $1\frac{1}{4}$ días b) $1\frac{2}{3}$ días c) $2\frac{1}{3}$ días
d) 1 día e) 2 días

06. Un burro atado a una cuerda de 3 metros de longitud tarda 5 días en comer todo el pasto que está a su alcance. Cierto día, su dueño lo amarra a una cuerda más grande y se demora 20 días en comer el pasto que está a su alcance.
Hallar la longitud de la nueva cuerda.

a) 4m. b) 5m. c) 6m.
d) 12m. e) 18m.

07. Para cosechar un campo cuadrado de 18m. de lado se necesitan 12 días.
¿Cuántos días se necesitan para cosechar otro campo cuadrado de 27m. de lado?

a) 18 b) 20 c) 22
d) 27 e) 30

08. Si en 80 litros de agua de mar existen 2 libras de sal, ¿Cuánta agua pura se debe aumentar a esos 80 litros para que en cada 10 litros de la mezcla exista $\frac{1}{6}$ de libra de sal?

a) 20 b) 35 c) 40
d) 60 e) 50

09. Una enfermera proporciona a un paciente una tableta cada 45 minutos.
¿Cuántas tabletas necesitará para 9 horas de turno si debe administrar una al inicio y al término del mismo?

a) 12 b) 10 c) 14
d) 13 e) 11

10. Una ventana cuadrada es limpiada en 2h. 40min. Si la misma persona limpia otra ventana cuadrada cuya base es 25% menor que la ventana anterior, ¿Qué tiempo demora?

a) 80 min b) 92 min
c) 1h 20min d) 1h 40min
e) 1h 30min

11. Si "A" obreros realizan una obra en $\left(\frac{3x}{2}+4\right)$ días.
¿En cuántos días $\frac{A}{2}$ obreros realizarán la misma obra?

a) 3(x 2) b) $3x - 2$ c) $3x + 8$
d) $\frac{3x}{8}+8$ e) $3x - 8$

12. Un sastre tiene una tela de 86 m. de longitud que desea cortar en pedazos de un metro cada uno. Si para hacer cada corte se demora 6 segundos, el tiempo que demorará en cortar la totalidad de la tela es: (en minutos).

a) 8,5 b) 8,6 c) 8,4
d) 8,7 e) 8,3

13. Manuel es el triple de rápido que Juan y juntos realizan una obra en doce días. Si la obra la hiciera solamente Manuel, ¿Cuántos días demoraría?

a) 20 b) 16 c) 18
d) 14 e) 48

14. Un albañil ha construido una pared en 14 días. Si hubiera trabajado 3 horas menos, habría empleado 6 días más para hacer la misma pared.
¿Cuántas horas ha trabajado por día?

a) 6 h b) 7 h c) 9 h
d) 10 h e) 8 h

Ejercicios de Regla de Tres Compuesta Mixta.

Consiste en aplicar de manera simultánea la **regla de tres simple** para más de dos magnitudes. El valor de la incógnita en una de las magnitudes se halla determinando inicialmente la **relación de proporcionalidad** (directa o inversa) que hay entre esa magnitud y las otras magnitudes (una a una).

Ejemplo 1

Si 16 operarios hacen 64 pares de zapatos cada 5 días, ¿cuántos días emplearon 20 operarios en hacer 128 pares de zapatos?

A) 6,0 B) 6,4 C) 6,8 D) 7,2 E) 8,0

Ejemplo 2

Un ganadero tiene 1500 ovejas para las cuales tiene alimentos para 30 días. Decide vender cierto número de ellas y a las restantes proporcionarles los tres quintos de ración para que los alimentos duren tres meses más. El número de ovejas que se vendieron fue:

A) 900 B) 485 C) 620 D) 875 E) 750

Más ejercicios de Regla de Tres Compuesta

Ejercicio 1

Cuatro amigos pueden terminar una obra en 18 días. Si después de tres días llega un amigo más, ¿cuantos días antes terminaran la obra?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

-

Ejercicio 2

Se necesitan 120 kg de heno para mantener 12 caballos durante 20 días. ¿Qué cantidad de heno se necesitará para mantener 7 caballos durante 36 días?

A) 125 B) 126 C) 124 D) 127

Ejercicio 3

Nueve albañiles, en 21 días trabajando 8 horas cada día, han pintado un edificio. ¿Cuántas horas diarias hubieran tenido que trabajar 4 albañiles, para hacer lo mismo en 7 días?

A) 55 B) 54 C) 53 D) 52

Ejercicio 4

Ocho obreros trabajan 18 días para poner 16 metros cuadrados de cerámica. ¿Cuántos metros cuadrados de cerámica pondrán 10 obreros si trabajan 9 días?

A) 18 B) 15 C) 10 D) 9

Ejercicio 5

Si 10 obreros pueden hacer un trabajo en 24 días. ¿Cuántos obreros de igual rendimiento se necesitarán para hacer un trabajo de 7 veces más considerable, en un tiempo de 5 veces menor?

A) 150 B) 200 C) 250 D) 350 E) 400

Ejercicio 6

Considerando que 12, obreros en 5 días han hecho $40m^2$ de su obra, ¿en cuántos días 60 obreros harán $80m^2$ de obra?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8

Ejercicio 7

Una cuadrilla de 15 hombres se compromete a terminar una obra en 12 días. Al cabo de 8 días, solo ha hecho los 3/5 de la obra. ¿Con cuántos hombres tendrá que reforzarse la cuadrilla para terminar la obra en el plazo previsto?

A) 5 B) 10 C) 8 D) 20 E) 12

Ejercicio 8

12 pintores se comprometen a realizar una obra. Al cabo de 16 días sólo han avanzado las 3 quintas partes de la obra. Si se retiraron 4 de ellos, ¿en cuántos días terminarán la obra los pintores que quedaron?

A) 16 días B) 14 días C) 15 días D) 17 días E) 18 días

Ejercicio 9

15 obreros trabajando juntos han hecho los 2/5 de una obra, trabajando 8 horas diarias en 6 días. ¿Cuántos obreros se necesitan para acabar la obra en 10 días trabajando 4 horas díarias?

A. 24 B. 18 C. 27 D. 75 E. 26

Ejercicio 10

Doce obreros se comprometieron a realizar una obra en 15 días y cuando habían hecho la mitad, abandonan el trabajo 3 de estos obreros. El número de días adicionales a los inicialmente calculados que necesitarán los obreros que quedan para terminar la obra, será:

A) 2,5 días B) 5,5 días C) 3,5 días D) 0,5 días E) 1,5 días

Preguntas que se resuelven con una Regla de Tres Compuesta

La **regla de tres compuesta** se usa cuando se relacionan tres o más magnitudes (directa o inversas), de modo que a partir de las relaciones establecidas entre las magnitudes conocidas obtenemos la magnitud desconocida. La regla de tres compuesta se compone de varias reglas de tres simples aplicadas sucesivamente.

Preguntas Resueltas

Pregunta 1

Se necesitan 120 kg de heno para mantener 12 caballos durante 20 días. ¿Qué cantidad de heno se necesitará para mantener 7 caballos durante 36 días?

A) 125 B) 126 C) 124 D) 127

Pregunta 2

5 hornos consumen 30 toneladas de carbón en 20 días; 3 hornos más consumirán en 25 días una cantidad de carbón
igual a :

Solución:

=> #Hornos .... Carbon(TN) .... #días

=> ... 5 .... 30 20

=> ... 8 .... x 25

Despejando

=> $x/30 = 8/5 \cdot 25/20$

=> $x = 60$ TN

Pregunta 3

Cinco trabajadores construyen una muralla en 6 horas. ¿Cuántos trabajadores se necesitan para construir 8 murallas en un solo día?

a) 12 b) 15 c) 20 d) 10

Pregunta 4

Un grupo de 15 obreros abrieron una zanja de 2 m de ancho, 1,2 m de profundidad y 100 m de largo, en 28 días. Luego otro grupo de 12 obreros del triple de rapidez que los anteriores, en 21 días abrieron otra zanja de 1,8 m de ancho y 1,5 m de profundidad. La longitud de la segunda zanja es:

A) 100m B) 110m C) 120m D) 150m E) 160m

Solución:

=> **#Obreros......... Zanja(m3)........ #días....... Rapidez**

=> .... 15 .... 2·12·100 .... 28 1

=> .... 12 .... 1,8·1,5·x 21 3

Resolviendo

=> 1,8·1,5·x = 2·1,2·100·12/15·21/28·3/1

=> x = 160 m

Pregunta 5

Un hombre con dos mujeres pueden hacer una obra en 10 días. Determinar el tiempo necesario para que 2 hombres con 1 mujer puedan hacer el trabajo que tiene 4 veces la dificultad del anterior sabiendo que el trabajo de un hombre y el de una mujer está en la misma relación que los números 3 y 2.

A) 25 B) 28 C) 35 D) 30 E) 40

Solución:

Sabemos que la eficiencia es

=> Hombre: 3

=> Mujer: 2

Entonces:

=> **Eficiencia total .... #días........ dificultad**

=> **1**·3 + **2**(2) 10 1

=> **2**·3 + **1**(2) .... x 4

Resolviendo

=> x = 10·4/1·7/8

=> x = 35

Pregunta 6

Ocho obreros trabajan 18 días para poner 16 metros cuadrados de cerámica. ¿Cuántos metros cuadrados de cerámica pondrán 10 obreros si trabajan 9 días?

A) 18　　B) 15　　C) 10　　D) 9

Pregunta 7

Dieciocho obreros hacen en 8 días los 1/3 de una obra; si en los siguientes 3 días por día ingresan "x" obreros más, concluyendo la obra, hallar "x".

A) 12　B) 20　C) 30　D) 18　E) 15

Solución:

=> Obreros_x_día .... Obra

=> 18·8 .... 1/3

Como han avanzado 1/3 de la obra, falta por concluir 2/3 de la obra, ademas cada día entran*x* obreros más, entonces

=> (18+x)·3 + (18+2x)·2 + (18+3x) = 2/3

=> 108 + 10*x* = 18·8·2

=> 10*x* = 180

=> *x* = 18

Preguntas Propuestas

Problema 1

En un albergue infantil, 7 niños consumen 15 latas de leche en 2 días. ¿Cuántas latas consumen 4 niños en 7 días?

a) 25　b) 45　c) 18　d) 20　e) 30

Problema 2

Un grupo de 30 obreros pueden hacer una obra en 12 días. ¿Cuántos días serán necesarios para que otro grupo de 20 obreros, de doble eficiencia que los anteriores, haga una obra similar?

a) 6　b) 7　c) 8　d) 9　e) 10

Problema 3

Un caño demoró 40 segundos en llenar un recipiente de forma cúbica, de 8 cm de arista. ¿Cuánto demora en llenar un recipiente cúbico de 12 cm de arista?

a) 144 s　b) 120 s　c) 135 s　d) 150 s　e) 180 s

Problema 4

Un grupo de 6 alumnos resuelve en 5 horas una tarea de 10 problemas. ¿Cuánto demora otro grupo de 4 alumnos, de igual eficiencia que los anteriores, en resolver una tarea de 4 problemas, pero de doble dificultad que la anterior?

a) 4h b) 6h c) 7,5 h d) 8h e) 10 h

Problema 5

En los resultados de una encuesta, se observa que de cada 120 personas, 85 hacen sus compras semanales fuera de su distrito. ¿Cuántas hacen sus compras en su distrito, de un total de 1080 personas encuestadas?

a) 825 b) 810 c) 729 d) 765 e) 855

Problema 6

Veinte obreros, para terminar una construcción en 40 días, trabajan 8 horas diarias. Luego de 5 días se retiraron 10 obreros y los restantes continuaron trabajando 10 días a razón de 10 horas diarias. ¿Qué parte de la obra falta terminar?

a) 825 b) 810 c) 729 d) 765 e) 855

Problema 7

Doce pintores se comprometen a realizar una obra. Al cabo de 16 días sólo han avanzado las tres quintas partes de la obra. Si se retiraron 4 de ellos, ¿en cuántos días terminarán la obra los pintores que quedaron?

A) 16 días B) 14 días C) 15 días
D) 17 días E) 18 días

Problema 8

Se ha calculado que 750m de una zanja pueden ser excavados en 10 días. Si 7 obreros hicieron 350m y posteriormente con 5 ayudantes concluyen la obra en el plazo fijado, entonces los días trabajados por los ayudantes son:

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Problema 9

Una cuadrilla de 120 obreros inician una obra que pueden culminar en 36 días. Al cabo del vigésimo quinto día se retira la doceava parte de la cuadrilla. Para finalizar la obra, ¿cuántos días más se necesitan?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Problema 10

Un trabajador demora 5 horas y 20 minutos para construir una pared. Cuando ya ha construido hasta los 3/5 de dicha pared, el trabajador se lesiona y su rendimiento disminuye a 1/3. ¿Cuánto tiempo tardará para hacer toda la pared?

A) 384 h B) 320 h C) 448 h D) 576 h E) 512 h

Problema 11

Un granjero tiene 300 cerdos para los cuales tiene alimentos para 30 días. Decide vender cierto número de ellos y a los que quedan proporcionarles los 3/5 de la ración que les correspondía, para que los alimentos duren 3 meses más. Halle el número de cerdos que se vendieron.

A) 225 B) 250 C) 75 D) 125 E) 175

Problema 12

Cinco orfebres hacen 12 anillos en 15 días. Si se desean hacer anillos en 25 días, ¿cuántos orfebres doblemente rápidos se deben contratar, además de los que se tienen?

A) 10 B) 15 C) 5 D) 4 E) 3

Problema 13

Un hombre y dos mujeres pueden hacer un trabajo en 6 días. Determine el tiempo necesario para que dos hombres y una mujer pueden hacer un trabajo que es el cuádruple del anterior, sabiendo que el trabajo de dos hombres es equivalente al de tres mujeres.

A) 12 días B) 21 días C) 36 días D) 18 días E) 25 días

Problema 14

La rueda A de 50 dientes engrana con la B de 40 dientes. Fija al eje de B está la rueda C de 15 dientes, que engrana con la rueda D de 25 dientes. Si la rueda A da 120 RPM, ¿cuánto tiempo demora la rueda D en dar 9900 revoluciones?

A) 2 h B) 1h 30 min C) 1h 45 min
D) 1 h 15 min D) 1h 50 min

Problema 15

Un niño se demora 8h en hacer con arena un cubo de 3 dm de arista. Habiendo avanzado la mitad de su trabajo se le pide que el cubo sea de 27 dm de arista. Si continúa trabajando durante 104 h más, ¿qué parte del nuevo cubo habrá construido?

A) 1/27 B) 1/32 C) 1/48 D) 1/54 E) 1/60

Progresión aritmética

En matemáticas, una **progresión aritmética** es una sucesión de números tales que la diferencia de dos términos sucesivos cualesquiera de la secuencia es una constante, cantidad llamada «diferencia de la progresión», «diferencia» o incluso «distancia».

Una progresión aritmética es una sucesión de números tales que cada uno de ellos (salvo el primero) es igual al anterior más un número fijo llamado diferencia que se representa por d.

8, 3, -2, -7, -12, ...

3 - 8 = -5

-2 - 3 = -5

-7 - (-2) = -5

-12 - (-7) = -5

d= -5.

En este ejemplo, la sucesión matemática 8,3,-2,-7, -12 ,… es una progresión aritmética de diferencia constante -5, así como 5, 2, −1, −4,… es una progresión aritmética de diferencia constante −3.

SÍMBOLO DE UNA PROGRESIÓN ARITMÉTICA:

Si delante de una sucesión de números ves el símbolo ÷ refiere a una progresión aritmética.

Ejemplo: $\div$ 3.8.13.18.......

Si pones este símbolo te ahorras escribir las palabras: *progresión aritmética*.

TÉRMINOS Y DIFERENCIA DE UNA PROGRESIÓN ARITMÉTICA:

A cada número de la sucesión le llamamos término y lo representamos por:

$$a_1 = primer\ Término$$
$$a_2 = segundo\ Término$$
$$a_3 = tercer\ Término$$
$$a_4 = cuarto\ Término$$
$$a_n = último\ término$$

Formulación

En una progresión aritmética, si se toman dos términos consecutivos cualesquiera de esta, la diferencia entre ambos es una constante, denominada *diferencia*. Esto se puede expresar como una relación de recurrencia de la siguiente manera:

$$a_{n+1} - a_n = d$$.

Conociendo el primer término a_1 y la diferencia d, se puede calcular el enésimo término de la progresión mediante sustitución sucesiva en la relación de recurrencia

$$a_1,\ \underbrace{(a_1 + d)}_{a_2},\ \underbrace{(\underbrace{a_1 + d}_{a_2} + d)}_{a_3},\ \cdots,\ \underbrace{(\underbrace{a_1 + (n-2)d}_{a_{n-1}} + d)}_{a_n}$$

con lo que se obtiene una fórmula para el término general de una progresión aritmética, escrita de manera compacta como:

(I) $a_n = a_1 + (n-1)d$

donde *d* es un número real cualquiera.

También se puede escribir el término general de otra forma. Para ello se consideran los términos a_m y a_n ($m<n$) de la progresión anterior y se ponen en función de a_1:

$$\begin{aligned} a_m &= a_1 + (m-1)d \\ a_n &= a_1 + (n-1)d \end{aligned}$$

Restando ambas igualdades, y trasponiendo, se obtiene:

(II) $a_n = a_m + (n-m)d$

expresión más general que (I), pues da los términos de la progresión conociendo uno cualquiera de ellos, y la diferencia.

Dependiendo de si la diferencia *d* en una progresión aritmética es positiva, nula o negativa, se tiene que:

$d>0$: progresión creciente. Cada término es mayor que el anterior.

- Ejemplo: 13, 16, 19, 22, 25, 28... ($d=3$)

$d=0$: progresión constante. Todos los términos son iguales.

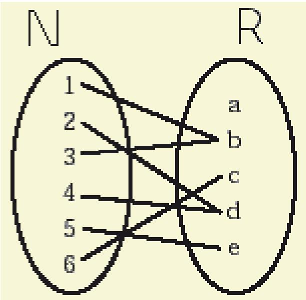
- Ejemplo: 2, 2, 2, 2, 2... ($d=0$)

$d<0$: progresión decreciente. Cada término es menor que el anterior.

- Ejemplo: 25, 20, 15, 10, 5, 0, -5,-10... ($d=-5$)

Término general de una progresión aritmética

$a_n = a_1 + (n - 1)\ d.$



Las sucesiones (por ejemplo, las progresiones aritméticas y geométricas) pueden verse como correspondencias unívocas entre el conjunto de los números naturales N y el de los reales R.

1. Si conocemos el 1[er] término.

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

8, 3, -2, -7, -12, ..

$a_n = 8 + (n-1)(-5) = 8 - 5n + 5 = = \mathbf{-5n + 13}$

2. Si conocemos el valor que ocupa cualquier **otro término** de la progresión.

$$a_n = a_k + (n - k) \cdot d$$

$a_4 = -7$ y $d = -5$

$a_n = -7 + (n - 4) \cdot (-5) = -7 - 5n + 20 = \mathbf{-5n + 13}$

Suma

La suma de los términos en un segmento inicial de una progresión aritmética se conoce a veces como **serie aritmética**. Existe una fórmula para las series aritméticas. La suma de los *n* primeros valores de una sucesión finita viene dada por la fórmula:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

donde a_1 es el primer término a_n, es el último y $\sum$ es la notación de sumatoria

Por ejemplo, considérese la suma:

$$2 + 5 + 8 + 11 + 14$$

La suma puede calcularse rápidamente tomando el número de términos *n* de la progresión (en este caso 5), multiplicando por el primer y último término de la progresión (aquí 2 + 14 = 16), y dividiendo entre 2. Tomando la fórmula, sería:

$$2 + 5 + 8 + 11 + 14 = \frac{5(2+14)}{2} = \frac{5 \times 16}{2} = 40.$$

Esta fórmula funciona para cualquier progresión aritmética de números reales conociendo

y . Por ejemplo:

$$\left(-\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{3\left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)}{2} = -\frac{3}{2}.$$

Obtención de la fórmula

Sea una progresión aritmética de término general a_n y de diferencia *d*, la suma de los *n* términos es:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d)$$

aplicando la fórmula ([II](#)), cada término a_1, a_2, a_3, ..., a_m de la progresión se puede expresar en términos del enésimo como $a_m = a_n - (n-m)d$. Así :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = (a_n - (n-1)d) + (a_n - (n-2)d) + \cdots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n$$

Sumando miembro a miembro las dos igualdades anteriores, se anulan todos los términos que están multiplicados por d:

$$2\sum_{i=1}^{n} a_i = n(a_1 + a_n)$$

de lo que se obtiene que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = n\frac{(a_1 + a_n)}{2}$$

.

Términos equidistantes

En cualquier progresión aritmética de diferencia d la suma del primer y último término es igual a la del segundo y el penúltimo, a la del tercero y el antepenúltimo, y así sucesivamente. Es decir, la suma de dos *términos equidistantes de los extremos* es constante, siempre que $(n-k)\geq 1$

$$a_1 + a_n = a_{1+k} + a_{n-k} = 2a_1 + (n-1)d = \text{cte}$$

Si la progresión cuenta con un número impar de términos, el *término central* a_c es aquél que por el lugar que ocupa en la progresión equidista de los extremos a_1 y a_n de ésta.

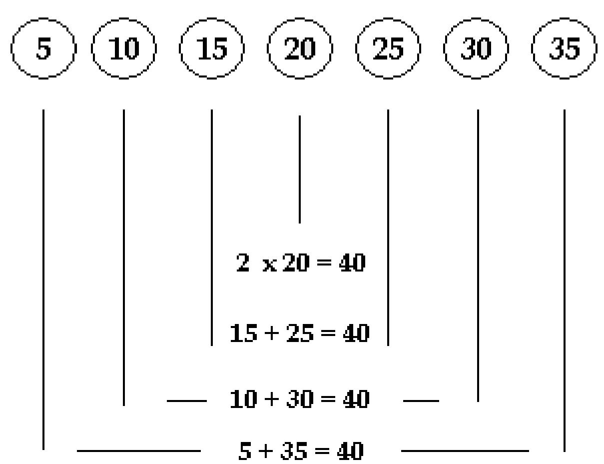
Representado de esta manera, es muy sencillo deducir la fórmula de la suma de los n términos de la progresión, anteriormente descrita. Para el caso en el que el número de términos es par, hay $n/2$ sumas contantes, con valor $(a_1 + a_n)$. Para el caso impar, hay $(n-1)/2$ sumas con valor $(a_1 + a_n)$ más el término central, que está ubicado en la posición

$$c = \frac{n+1}{2}$$

Sustituyendo c en la fórmula (I) y operando un poco, el término también queda representado en función de $(a_1 + a_n)$, como

$$a_c = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} = \frac{a_1 + a_n}{2}$$

por lo que en total, hay $n/2$ sumas con valor $(a_1 + a_n)$ como en el caso par y la fórmula queda validada para todo n.



$$\boxed{a_1 + a_n = a_{1+k} + a_{n-k} = 2a_c = cte}$$

Los siete primeros términos de la progresión aritmética de término general $a_n = 5n$. Se comprueba que la suma de los términos primero y último es igual a la suma de dos términos

equidistantes a éstos, e igual al doble del término central.

Ejemplos notables

Hallar la suma de los *n* primeros enteros positivos, corresponde a calcular la serie aritmética de los *n* términos de la progresión aritmética de diferencia d=1 y término inicial a_1=1:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

que, para cada valor de *n*, también se conoce como número triangular.

Una historia muy conocida es la del descubrimiento de esta fórmula por Carl Friedrich Gauss cuando tenía diez años. Su maestro, en la primera clase de aritmética, pidió a sus alumnos hallar la suma de los 100 primeros números y él calculó el resultado de inmediato: 5050

Producto

El producto de los términos de una progresión aritmética finita cuyo término inicial es a_1, diferencia d, y n elementos en total está determinado por la expresión en forma cerrada

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 a_2 \cdots a_n = d\frac{a_1}{d} d\left(\frac{a_1}{d}+1\right) d\left(\frac{a_1}{d}+2\right) \cdots d\left(\frac{a_1}{d}+n-1\right) = d^n \left(\frac{a_1}{d}\right)^{\overline{n}} = d^n \frac{\Gamma\left(\frac{a_1}{d}+n\right)}{\Gamma\left(\frac{a_1}{d}\right)},$$

donde $x^{\overline{n}}$ denota el factorial ascendente y denota la función Gamma. (Nótese sin embargo que la fórmula no es válida cuando a_1/d es un entero negativo o cero.)

Esto es una generalización del hecho de que el producto de la progresión $1 \times 2 \times \cdots \times n$

es dado mediante el factorial $n!$ y de que el producto

$$m \times (m+1) \times (m+2) \times \cdots \times (n-2) \times (n-1) \times n$$

para enteros positivos m y viene dado por

$$\frac{n!}{(m-1)!}.$$

Tomando la fórmula de arriba, por ejemplo, el producto de los términos de la progresión aritmética dada por $a_n = 3 + (n-1)5$ hasta el 50-ésimo término es

$$P_{50} = 5^{50} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{5}+50\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{5}\right)} \approx 3.78438 \times 10^{98}.$$

Aplicaciones de las progresiones aritméticas

La matemática, a diferencia de otras ciencias, tiene el rasgo particular de infundir miedo en las personas que no poseen un gusto natural por los números, pero la razón es el modo en el que nos la enseñan en nuestra etapa estudiantil. En sentido estricto, dominar los cálculos y las ecuaciones es “tan difícil” como entender y ser capaz de narrar las historias de los próceres o de aprender a usar el lenguaje con precisión, respetando las reglas de gramática y ortografía, ya que cada persona tiene facilidad para un tipo de **conocimiento** en particular.

Dicho esto, los números están presentes en nuestra vida cotidiana, tanto como los vestigios de la historia de la humanidad y los tiempos verbales; simplemente **hay que saber detectarlos para darle sentido a los conceptos matemáticos** y aprender a utilizarlos de manera que nos ayuden a vivir mejor. Sin darnos cuenta, a diario nos encontramos con muchos conceptos que en la escuela detestábamos y creíamos que jamás nos servirían; las progresiones aritméticas no son una excepción, como podremos apreciar a continuación.

Supongamos que tenemos una bolsa de billetes, todas del mismo valor, y necesitamos conocer la suma total: lo normal es tomarlos de a uno en uno e ir agrupándolos a un costado mientras mentalmente realizamos la suma. Pues bien, dicha operación no es otra cosa que una progresión aritmética en la cual **el valor de la distancia es el de la moneda**.

Por otro lado, en la confección de manualidades y en el diseño de muchos tipos de elementos que usamos con diferentes fines en la vida cotidiana tambien aprovechamos las bases de las progresiones aritméticas de forma inconsciente. Por ejemplo, al construir o dibujar un objeto con forma de pirámide partiendo de piezas del mismo **tamaño**, lo normal es armar una base de **x** piezas y, en cada nivel, restar una **diferencia** constante, hasta llegar a la cima.

En el ámbito empresarial, la progresión aritmética también se utiliza con frecuencia; tal es el caso de las empresas financieras, que aprovechan este concepto para calcular **promedios**, aplicando conocimientos propios de la estadística.

Progresión geométrica

Una **progresión geométrica** es una secuencia en la que el elemento siguiente se obtiene sumando el elemento anterior por una constante denominada *razón* o *factor* de la progresión. Se suele reservar el término *progresión* cuando la secuencia tiene una cantidad finita de términos mientras que se usa *sucesión* cuando hay una cantidad infinita de términos

En otras palabras, Una progresión geométrica es una sucesión en la que cada término se obtiene multiplicando al anterior una cantidad fija r, llamada razón.

Si tenemos la sucesión: 3, 6, 12, 24, 48, ...

6 / 3 = 2

12 / 6 = 2

24 / 12 = 2

48 / 24 = 2

r= 2.

Así, es una progresión geométrica con razón igual a 2, porque cada elemento es el doble del anterior. Se puede obtener el valor de un elemento arbitrario de la secuencia mediante la expresión del término general, siendo a_n el término en cuestión, a_1 el primer término y r, la razón:

$$a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)}$$

Para obtener la razón en una progresión geométrica lo más sencillo es dividir un término cualquiera entre el término anterior, o sea:

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

Ejemplos de progresiones geométricas

- La progresión 1, 2, 4, 8, 16, ... es una progresión geométrica cuya razón vale 2, al igual que 5, 10, 20, 40, ...
- La razón no necesariamente tiene que ser un número entero. Así, 12, 3, 0.75, 0.1875, ... es una progresión geométrica con razón 1/4.
- La razón tampoco tiene por qué ser positiva. De este modo la progresión -3, 6, -12, 24, ... tiene razón -2. Este tipo de progresiones es un ejemplo de **progresión alternante** porque los signos alternan entre positivo y negativo.
- Cuando la razón es igual a 1 se obtiene una progresión constante: 7, 7, 7, 7, ...
- Un caso especial es cuando la razón es igual a cero, por ejemplo: 4, 0, 0, 0, ... Existen ciertos autores que no consideran este caso como progresión y piden explícitamente que $r \neq 0$ en la definición.

Término general de una progresión geométrica

1. Si conocemos el 1^er^ término.

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

3, 6, 12, 24, 48, ..

$a_n = 3 \cdot 2^{n-1} = 3 \cdot 2^n \cdot 2^{-1} = \mathbf{(3/2) \cdot 2^n}$

2. Si conocemos el valor que ocupa cualquier otro término de la progresión.

$$a_n = a_k \cdot r^{n-k}$$

$a_4 = 24$, $k=4$ y $r=2$.

$a_n = a_4 \cdot r^{n-4}$

$a_n = 24 \cdot 2^{n-4} = (24/16) \cdot 2^n = (3/2) \cdot 2^n$

Interpolación de términos

Interpolar medios geométricos o proporcionales entre dos números, es construir una progresión geométrica que tenga por extremos los números dados.

Sean los **extremos a y b**, y el número de **medios** a interpolar **m**.

$$r = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$$

Interpolar tres medios geométricos entre 3 y 48.

$$r = \sqrt[4]{\frac{48}{3}} = \sqrt[4]{16} = 2$$

3, **6, 12, 24**, 48.

Suma de n términos consecutivos

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$$

Calcular la suma de los primeros 5 términos de la progresión : 3, 6, 12, 24, 48, ...

$$S_5 = \frac{48 \cdot 2 - 3}{2 - 1} = 93$$

Suma de los términos de una progresión geométrica decreciente

$$S = \frac{a_1}{1 - r}$$

Calcular la suma de los términos de la progresión geométrica decreciente ilimitada:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$$

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Producto de dos términos equidistantes

Sean a_i y a_j dos términos equidistantes de los extremos, se cumple que el producto de términos equidistantes es igual al producto de los extremos.

$$\mathbf{a_i \,.\, a_j = a_1 \,.\, a_n}$$

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$$

$$a_3 \cdot a_{n-2} = a_2 \cdot a_{n-1} = \ldots = a_1 \cdot a_n$$

3, 6. 12, 24, 48, ...

48 · 3 = 6 · 24 = 12 · 12

144 = 144 =144

Producto de n términos equidistantes

$$P = \pm\sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

Calcular el producto de los primeros 5 términos de la progresión: 3, 6, 12, 24, 48, ...

$$P_5 = \sqrt{(3 \cdot 48)^5} = \sqrt{\left(3 \cdot 3 \cdot 2^4\right)^5} = \sqrt{3^{10} \cdot 2^{20}} = 3^5 \cdot 2^{10} = 248\,832$$

Suma de términos de una progresión geométrica

Suma de los primeros *n* términos de una progresión geométrica

Se denomina como S_n a la suma de los *n* primeros términos consecutivos de una progresión geométrica:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

Si se quiere obtener una fórmula para calcular de una manera rápida dicha suma, se multiplica ambos miembros de la igualdad por la razón de la progresión *r*.

$$r \cdot S_n = r \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n)$$
$$r \cdot S_n = r \cdot a_1 + r \cdot a_2 + \ldots + r \cdot a_{n-1} + r \cdot a_n$$

puesto que si $r \cdot a_i = a_{i+1}$

$$r \cdot S_n = a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_{n+1}$$

Si se procede a restar de esta igualdad la primera:

$$r \cdot S_n - S_n = a_{n+1} - a_1$$

ya que todos los términos intermedios se cancelan mutuamente.

Despejando S_n

$$S_n = \frac{a_{n+1} - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 \cdot r^n - a_1}{r - 1} = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

De esta manera se obtiene la suma de los *n* términos de una progresión geométrica cuando se conoce el primer y el último término de la misma. Si se quiere simplificar la fórmula, se puede expresar el término general de la progresión a_n como:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot r^n - a_1}{r - 1} = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

que expresa la suma de *n* términos consecutivos de una progresión geométrica en función del primer término y de la razón de la progresión.

Se puede generalizar el procedimiento anterior para obtener la suma de los términos consecutivos comprendidos entre dos elementos arbitrarios $a_m \ y \ a_n$ (ambos incluidos):

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \frac{r \cdot a_n - a_m}{r - 1} = a_1 \cdot \frac{(r^n - r^{m-1})}{r - 1} = a_m \cdot \frac{(r^{n-m+1} - 1)}{r - 1}$$

Suma de infinitos términos de una progresión geométrica

Si el valor absoluto de la razón es menor que la unidad $|r| < 1$, la suma de los infinitos términos decrecientes de la progresión geométrica converge hacia un valor finito. En efecto, si $|r| < 1$, r^∞ tiende hacia 0, de modo que:

$$S_\infty = a_1 \frac{r^\infty - 1}{r-1} = a_1 \cdot \frac{0-1}{r-1}$$

Finalmente, la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de razón inferior a la unidad es:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$$

Producto de los primeros *n* términos de una progresión geométrica

El producto de los *n* primeros términos de una progresión geométrica se puede obtener mediante la fórmula

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = \left(\sqrt{a_1 \cdot a_n}\right)^n$$ Si $a_1, r > 0$

Dado que los logaritmos de los términos de una progresión geométrica de razón *r* (si), están en progresión aritmética de diferencia log *r*, se tiene:

$$\log(\prod_{i=1}^{n} a_i) = \sum_{i=1}^{n} \log a_i = \frac{(\log a_1 + \log a_n)n}{2} = \log\left(\sqrt{a_1 \cdot a_n}\right)^n$$

,

y tomando antilogaritmos se obtiene la fórmula.

Uso de la progresión geométrica y qué importancia tiene

En el mundo de la inversión es importante conocer la progresión geométrica y su velocidad de crecimiento. El denominado **“interés compuesto”** es una progresión geométrica. Comparemos varias inversiones con diferentes intereses compuestos, o progresiones geométricas:

AÑO	INTERÉS 4%	INTERÉS 6%	INTERÉS 8%	INTERÉS 10%
1	100	100	100	100
5	116,99	126,25	136,05	146,41
10	142,33	168,95	199,90	235,79
20	210,68	302,56	431,57	611,59
30	311,87	541,84	931,73	1.568,31
40	461,64	970,35	2.011,53	4.114,48
50	683,33	1.737,75	4.342,74	10.671,90

En el quinto año las diferencias no parecen muy grandes pero a medida que van pasando los años pasan a ser enormes.

Este tema, el **crecimiento futuro** de las inversiones es absolutamente **clave** para un inversor. Es muy común comparar 2 inversiones únicamente por la rentabilidad que se va a obtener el primer año y ni siquiera considerar la posible evolución futura de cada una ellas a largo plazo. Sin embargo, para un inversor de largo plazo el primer año es el menos importante de todos. La clave está en el crecimiento futuro que vayan a tener cada una de las alternativas que está considerando.

Supongamos 4 alternativas de inversión. Todas dan un 5% de rentabilidad (por dividendo, alquiler o lo que sea) el primer año, con lo que invirtiendo 100 euros en cualquiera de ellas obtendremos 5 euros. Muchos inversores terminan aquí su análisis y eligen la de menor riesgo aparente, ya que consideran un sinsentido correr un riesgo mayor para obtener los mismos 5 euros. Pero el crecimiento de la renta (los 5 euros) que da cada una de las alternativas de este ejemplo es diferente, creciendo en progresión geométrica del 4%, 6%, 8% y 10%. En la siguiente tabla veremos la evolución de esos 5 euros en cada caso a lo largo del tiempo.

AÑO	INTERÉS 4%	INTERÉS 6%	INTERÉS 8%	INTERÉS 10%
1	5	5	5	5
5	5,85	6,31	6,80	7,32
10	7,12	8,45	10,00	11,79
20	10,53	15,13	21,58	30,58
30	15,59	27,09	46,59	79,32
40	23,08	48,52	100,58	205,72
50	34,17	86,89	217,14	533,59

El primer año parecían todas iguales, pero el paso del tiempo demostró que no lo eran. Este crecimiento futuro de las inversiones (siempre estimado porque el futuro no se conoce) es **decisivo** al elegir entre varias alternativas de inversión.